"¡EUCLIDES DEBE IRSE!": NUEVOS CONCEPTOS PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMATICAS EN EL LICEO Y LA UNIVERSIDAD

por JEAN DIEUDONNÉ

Mi tarea especifica al presente es examinar, desde el punto de vista de los programas actuales de matemática en las universidades y en las actuales escuelas de ingenieria, lo siguiente: a) ¿qué conocimientos básicos de matemática quisieran los profesores de estas instituciones que poseyeran los estudiantes al finalizar sus estudios de secundaria?; b) lo que realmente logran; c) cómo se podria mejorar la situación actual.

Con el fin de proporcionar lo que creen que es un curso de matemática satisfactorio, los profesores de la universidad consideran que un estudiante de primer año debe estar familiarizado con cierto número de técnicas elementales en las que se requiere largo tiempo para adquirir eficiencia, y que son esenciales para un progreso sucesivo, tales como álgebra lineal elemental, geometria analitica, trigonometria y algo de cálculo. Por otra parte, los estudiantes ya deben estar bastante expertos en el uso de la deducción lógica y tener alguna idea del método axiomático.

No afirmo que éstas sean las únicas metas de la enseñanza matemática en la escuela secundaria; ciertamente, no creo que éste sea el caso, aunque no fuera sino porque muchos de los estudiantes de secundaria no ingresan a la universidad ni a las escuelas técnicas. Sin embargo, para los fines de mi exposición, me concentraré en lo que podria llamarse el problema estrictamente práctico de la transición de las escuelas secundarias a las universidades.

Creo que podria decirse que la mayoria de los profesores universitarios convienen en que la presente situación a este respecto es, desgraciadamente, muy mala y constantemente sigue empeorándose.

Debo apresurarme a manifestar que las limitaciones que voy a discutir no pueden, en forma alguna, ser atribuidas a los maestros de las escuelas secundarias que están, según creo, por lo general profundamente dedicados y altamente interesados en sus tareas.

Otra observación preliminar es que hasta cerca de 1880, no se ha habria podido justificar seriamente una critica de esta naturaleza al programa de enseñanza secundaria. La matemática universitaria estaba esencialmente confinada al cálculo y a la geometria analitica, al estudio completo de la geometria euclidiana y al álgebra elemental, que era y es aún parte principal del programa de la escuela secundaria; podia, con alguna razón, ser considerada como una preparación bastante adecuada.

Retraso en las escuelas secundarias

Lo que ha ocurrido desde entonces es que el programa de la universidad ha sufrido cambios, que no han correspondido (por lo menos no del todo en la misma medida o basándose en los mismos principios) a los ocurridos en las escuelas secundarias.

Es en las universidades, naturalmente, donde se ha sentido el impacto de los "nuevos conceptos" de la matemática. Se han incorporado a los programas desarrollos totalmente nuevos dentro del análisis, no sólo por su valor intrinseco, sino también debido a sus aplicaciones a la fisica teórica (v. gr. ecuaciones funcionales tales como las ecuaciones integrales, espacios de Hilbert, cálculo tensorial, etc.).

Por otra parte se ha puesto gran empeño en dar más unidad y concisión a las diferentes ramas del análisis clásico, derivándolas de teorias más abstractas, tales como la topologia o el álgebra moderna. Esta parece en realidad la única forma por la que se puede esperar mantenerse al corriente respecto de los nuevos conocimientos, que constantemente se van agregando a nuestra herencia clásica.

Sin embargo, la adquisición de estos principios abstractos y la familiarización con su uso toma un tiempo considerable y, además, los estudiantes tienen todavia que dominar viejas técnicas del cálculo y de la geometria analitica. El resultado de esta 'compresión' es que cada vez hay mayor número de profesores universitarios seriamente preocupados cuando comprueban que el resultado neto de su enseñanza se está volviendo cada dia más superficial.

Con los nuevos y recargados programas enciclopédicos, la mayoria de los estudiantes simplemente egresan con las más confusas nociones sobre la materia. No sólo no han asimilado debidamente las partes modernas, sino que también han fracasado en la adquisición de la eficiencia técnica en las antiguas "epsilónicas", que por lo menos podian esperarse ocasionalmente de sus predecesores.

En ciencia no se puede retroceder, ni siquiera considerar un renunciamiento a los nuevos métodos y nuevos resultados; seria la negación misma de lo que constituye la misión primordial de la enseñanza superior. Por otra parte, poderosas razones sociales actúan contra cualquier extensión apreciable de los ya largos años universitarios, que no obstante se han vuelto indispensables para la mayoria de las profesiones en la actualidad.

Para disminuir la "compresión" mencionada anteriormente, sólo puede hacerse lo siguiente: reorganizar el programa de la escuela secundaria eliminando toda pérdida innecesaria de tiempo y haciéndose cargo, en lo posible, del peso que ahora recae por completo en la universidad, en la medida que sea compatible con la capacidad intelectual de los niños.

Otro argumento conduce a la misma conclusión: aún en el siglo XIX el paso de la geometria clásica y el álgebra al cálculo fue siempre considerado como un salto a un nuevo mundo. Con el advenimiento de la nueva matemática esa brecha se ha agrandado considerablemente; es motivo de asombro entre los estudiantes de primer año de la universidad, que hasta llegan a quejarse a sus profesores de que están bajo la impresión de que lo que se les enseña no es "matemática real" (es decir, que no es la matemática que estaban acostumbrados a usar en la escuela secundaria).

En los últimos cincuenta años, los matemáticos han sido llevados a introducir no sólo nuevos conceptos sino un nuevo lenguaje, un lenguaje que surgió empíricamente de las necesidades de la investigación matemática y cuya habilidad para expresar enunciados matemáticos en forma concisa y precisa ha sido repetidamente probado y ha ganado aceptación universal.

Pero hasta ahora la introducción de esta nueva terminología (por lo menos en Francia) ha sido tenazmente resistida por las escuelas secundarias, que se apegan desesperadamente a un idioma anticuado e insuficiente. Y de este modo, cuando un estudiante entra a la universidad, es muy probable que no haya oído nunca expresiones matemáticas tan corrientes como: conjunto, representación, grupo, espacios vectoriales, etc. No hay que extrañarse de que se sienta frustrado y desconcertado al tener contacto con las matemáticas superiores.

Algunos elementos del cálculo, álgebra vectorial y un poco de geometría analítica han sido introducidos recientemente en los últimos dos o tres años de la escuela secundaria. Pero tales tópicos han sido relegados siempre a una posición subordinada, manteniéndose, como antes, "la geometría pura" como el centro de interés, "enseñada más o menos de acuerdo con Euclides, con algo de álgebra y teoría del número".

¡Euclides debe irse!

Creo que los días de este trabajo de remiendo han terminado y estamos ahora comprometidos en una reforma mucho más profunda, a menos que estemos dispuestos a dejar que la situación se deteriore hasta el punto que impida seriamente mayor progreso científico. Y si todo el programa que tengo en mente pudiera resumirse en una frase, ella sería ¡Euclides debe irse!

Pueda ser que esta declaración choque a algunos, pero me gustaría presentar los detalles con fuertes argumentos en su favor. Debo decir, primero que tengo la más profunda admiración por los logros de los griegos en el campo de la matemática; considero su creación de la geometría quizás como la realización intelectual más extraordinaria alcanzada por la humanidad. Es gracias a los griegos que hemos podido erigir la elevada estructura de la ciencia moderna. Pero al hacer esto, las nociones básicas de la geometría misma han sido profundamente estudiadas, especialmente desde mediados del siglo XIX. Esto ha permitido reorganizar el corpus euclidiano sobre fundamentos sencillos y evaluar de nuevo su importancia con relación a la matemática moderna, separando aquello que es fundamental de un caótico agrupamiento de resultados sin ninguna significación, excepto como reliquias sueltas de métodos difíciles o de un tratamiento anticuado.

Quizás el resultado sea un poco alarmante. Supongamos, siguiendo la idea, que hubiera que enseñar geometría plana euclidiana a mentes maduras de otro mundo que nunca hayan oído hablar de ella, o teniendo presente solamente sus posibles aplicaciones a la investigación moderna. Todo el curso podría, entonces, creo, ser abordado en dos o tres horas, una de ellas ocupada con la descripción del sistema de los axiomas; otra, con sus útiles consecuencias, y posiblemente una tercera, para unos cuantos ejercicios sencillos e interesantes.

Todo lo demás, que llena ahora volúmenes de "geometría elemental" y por esto quiero decir, por ejemplo, todo lo que se refiere a los triángulos (¡es perfectamente posible y deseable describir la teoría completa sin siquiera definir lo que es un triángulo!), casi todo lo relativo a la inversión, sistemas de círculos, cónicas, etc., tiene tanta importancia para lo que los matemáticos (puros y aplicados) están haciendo hoy como los cuadros mágicos a los problemas de ajedrez.

Si esto parece fantástico, permítaseme entrar en algunos detalles. Recordemos antes que nada lo que son los axiomas. La teoría de los números reales aceptada como conocida, los objetos indefinidos introducidos en la geometría plana euclidiana son los vectores bidimensionales, con tres operaciones indefinidas, donde estos vectores intervienen, es decir, adición $X + Y$, producto por un escalar Ky, el producto escalar $X.\ Y$ es un número. Los axiomas que unen estas nociones son los siguientes:

(A) $x + y$ igual $y + x$
$x + (y + z)$ igual $(x + y) + z$
$1.x$ igual x
$(k_1 + k_2)\, x$ igual $k_1x + k_2x$
$k(x + y)$ igual $kx \times ky$
$k_1\, (k_2\, x)$ igual $(k_1 k_2)\, x$

El mayor número de vectores linealmente independientes es 2

(B) $x.\ (y + z)$ igual $x. + x.z$
$x.y$ igual $y.x$
$(kx)\ y$ igual $k\ (xy)$
$x.x$ mayor que 0
excepto para x igual 0

Lo que he llamado las consecuencias útiles son, por una parte, el álgebra lineal bidimensional (dependencia lineal, bases, líneas rectas, el grupo de traslaciones y homotecias, líneas paralelas, representaciones lineales forman lineales y ecuaciones de líneas), que se deriva exclusivamente del sistema de axiomas (A), y constituye lo que también se llama geometría plana afín, y, por otro lado, ortogonalidad, circu-

los, rotaciones, simetrias, ángulos y el grupo de las isometrias, (1) que surge de (B).
Por supuesto que desde este punto de vista, la antigua controversia de la geometria "pura" contra la geometria "analitica" se torna menos significativa, siendo ambas simples traducciones del lenguaje de los vectores (el cual dicho sea de paso, con frecuencia es mejor aplicado directamente). Es claro que la geometria tridimensional puede desarrollarse exactamente siguiendo las mismas lineas (consistiendo el único cambio en los axiomas en reemplazar el 2 por el 3 en (A).

Proceso actual extremadamente dificil

En contraste con esta forma "ideal" de enseñar geometria, no es necesario decir que se está haciendo realmente en la escuela secundaria. No se ha dado nunca una definición axiomática estricta de las nociones básicas; se las introduce recurriendo directamente a la intuición aunque no se ha aclarado nunca su exacta relación con los objetos fisicos que se supone han de "idealizar". Como no se ha fijado un sistema completo de axiomas es por supuesto, del todo imposible comprobar la corrección de prueba alguna.
Finalmente, por medio de un proceso extremadamente laborioso y complicado (en el que las propiedades afines y métricas se confunden en forma irremediable) se llega, como los asi llamados "teoremas", a las simples propiedades señaladas en (A) y (B), después de haber empleado además, meses y años en todas las menudencias matemáticas mencionadas anteriormente.
Los defensores de la "tradición a toda costa" tienen, por supuesto, una respuesta lista para esto. Si se ha de creerles, la geometria euclidiana, enseñada como lo hacen ellos es el único método por el cual la mente del niño puede abrirse a una interpretación verdadera de la matemática. Sin embargo, como nunca se ha probado otra manera de abordarlo, veo dificilmente cómo se puede tomar esta afirmación si no como un articulo de fe.
Agregarán, además que después de todo los grandes matemáticos del pasado y del presente fueron educados de esa manera, lo cual no les impidió que hicieran sus descubrimientos. Esto es efectivamente cierto, pero estoy convencido que si a estos matemáticos no se les hubiera enseñado hasta, digamos, la edad de 16 años, absolutamente nada, habrian probablemente salido de igual modo bien; y todos los matemáticos de mi generación saben por experiencia las penas que tuvieron que pasar para desprenderse de los malos hábitos y los puntos de vista errados que se les habia inculcado con una educación anticuada.
Puedo agregar, además, que estos argumentos corrientes son de poco peso. Nadie debe preocuparse, por lo menos en la escuela secundaria, por enseñar a los futuros matemáticos profesionales (para no mencionar los grandes), de los que puede haber uno entre 10.000 niños. Lo que realmente está en juego es la clase de cuadro mental de la matemática que surgirá en la mente de un estudiante de inteligencia promedio después de ser sometido a ese tratamiento por varios años. Desafortunadamente, como he dicho, esta prueba no confirma concluyentemente la pretensión de los tradicionalistas, como podemos verlo en las universidades.

¿Cómo se reemplazaria a Euclides?

Si tuviéramos un programa libre por fin del peso muerto de la "geometria pura" ¿qué pondriamos en su lugar? Ya he mencionado brevemente algunos de los tópicos que comprenderian una preparación extremadamente valiosa para las teorias del nivel superior; señalaria con más detalles los siguientes:
a) matrices y determinantes de orden 2 y 3; b) cálculo elemental (funciones variables de uno); c) construcción de la gráfica de una función y de una curva dada en forma paramétrica (usando derivadas); d) propiedades elementales de los números complejos; e) coordenadas polares.
Sostengo que ninguno de éstos envuelven un pensamiento más abstracto o profundo que la geometria clásica, siempre que su enseñanza esté adaptada al desarrollo intelectual de los estudiantes. Esto quiere decir, por supuesto, que quedan pendientes varios problemas graves, siendo el principal: cómo organizar este material en un programa bien balanceado e idear métodos para su enseñanza.
Creo que estoy entrando en terreno prohibido, puesto que no he tenido experiencia en prácticas de la educación al nivel preuniversitario, y espero que si quieren aceptar la clase de reforma que estoy proponiendo, podrian sugerir con más experiencia soluciones posibles a estos problemas.
Sin embargo, no dejaria este tema sin, por lo menos en parte, haber bosquejado un plan de lo que veo como una meta posible para nuestros propósitos. Puede ser que lo que estoy proponiendo aparezca muy poco realista y por lo tanto no estoy dando otra cosa que no sea una especie de "hipótesis de trabajo", como punto de partida, sin concederle demasiada importancia a sus detalles.

Dos principios orientadores

En primer lugar, hay dos principios orientadores que considero totalmente fundamentales; ambos son lugares comunes, pero quizás no sea del todo inútil expresarlos brevemente.
El primero (que lo he oido con mucha frecuencia a maestros de mayor experiencia que yo y que lo confirmo por mi propia experiencia como estudiante) es que una teoria matemática sólo puede desarrollarse axiomáticamente en una forma fructifera cuando el estudiante ha adquirido ya alguna familiaridad con el material correspondiente; una familiaridad ganada por haber trabajado lo suficiente con él en un tipo de base experimental o semiexperimental, es decir, con un constante llamado a la intuición.
El otro principio (que he visto destacado por varios educa-

dores en publicaciones recientes y que parece indicar que en la práctica se observa bastante bien), es que, cuando se introduce la inferencia lógica en algunas cuestiones matemáticas, debe presentarse siempre con absoluta honestidad —es decir, sin tratar de esconder defectos o vacíos en la discusión—; cualquiera otra forma, en mi opinión, es peor que no dar ninguna prueba.

Tengo en mente, en especial, la forma en que se enseñan en la actualidad los comienzos de la geometría, con un desfile de "definiciones", que no pueden ser analizados lógicamente. Por consiguiente, parece una desgracia no poder presentar a los estudiantes una teoría completamente deductiva, partiendo desde los axiomas básicos; y como esto resulta demasiado difícil para el nivel elemental, se ha considerado que es preferible poner en práctica una "estafa" intelectual más bien que admitir francamente la situación.

Por mi parte no considero un error ni un deshonor partir de una premisa que no es axioma, sino más bien una afirmación bastante complicada, lo más pronto posible, para mostrar sin ninguna falla lógica que la afirmación dada implica otra. Esto no sólo sería más educativo, sino que también pondría en su verdadero foco la naturaleza de la inferencia lógica y su carácter relativo, que muchas veces se ve obscurecido por la forma en que se los mezcla irremediablemente con la noción metafísica de la verdad.

Lineamiento de un programa moderno

Con estas ideas en mente, pasemos a bosquejar lo que considero podría ser un programa moderno. Lo dividiré según la edad del estudiante (para evitar las peculiaridades nacionales y la distribución en varios grados o clases) y en cada nivel discutiré los aspectos "experimentales" y "educativos" de los diversos tópicos.

Hasta los 14 años de edad es muy cuerdo probablemente limitar la enseñanza de la matemática en este período al trabajo "experimental" con álgebra y geometría plana y no hacer ningún intento de axiomatización. Esto no quiere decir que no sea posible destacarla de manera inequívoca.

En álgebra la meta es familiarizar al alumno por completo con la técnica del cálculo literal, la noción del número negativo y la solución de problemas lineales con una o dos incógnitas; esto es lo que se hace esencialmente en la actualidad, y por lo tanto, no tengo aquí que proponer modificaciones, excepto que me gustaría ver que se dediquen en esta etapa más horas al álgebra que a la geometría.

Con relación a la geometría, entiendo que se han llevado a cabo últimamente en los círculos educativos muchas investigaciones y experimentos (especialmente en Bélgica) relativos a los métodos por lo que esta enseñanza de geometría, como una parte de la física, por decirlo así, podría ser conducida. Creo que este movimiento debe ser estimulado intensamente, siempre que se ponga énfasis no en cosas artificiales, como los triángulos, sino en nociones básicas como simetrías, translaciones, composición de las transformaciones, etc.

Finalmente, en toda esta matemática "experimental" el lenguaje y las anotaciones, usadas ahora universalmente, deberán introducirse lo antes posible: no hay nada misterioso ni prohibido en usar los símbolos de "pertenencia", "implicación", o hablar de subconjuntos en vez de "lugares geométricos" y llamar algunos objetos por sus nombres propios, como "grupo" o "relación de equivalencia" —siempre que tal objeto sea naturalmente observado en una composición algebraica o geométrica— no implica en absoluto que no tenga necesariamente que desarrollarse por adelantado la teoría abstracta de los grupos y de las relaciones de equivalencia.

Si psicológicamente hablando, se cree recomendable establecer algunos axiomas en este nivel, luego, con nuestro principio general, deberíamos recurrir a la parte de las matemáticas con lo que los niños han tenido más prolongado contacto en su fase "experimental", o sea la aritmética elemental.

En verdad, éste es uno de los más sencillos y bellos ejercicios en lógica para desarrollar las leyes corrientes de aritmética partiendo de los "axiomas de Peano", y no veo razón por qué no se ha de intentar esto cuanto antes. Esto pondría también en manos del estudiante uno de los instrumentos más fundamentales de la matemática moderna y de la clásica, es decir, el uso de la inducción matemática.

Huelga decir que esto no debe comenzarse antes de que se haya hecho comprender al estudiante la necesidad de tal tratamiento axiomático urgiéndole a que piense lo que se entiende por números enteros y por qué aceptamos la validez de las leyes de la aritmética para tales objetos totalmente más allá de nuestra concepción intuitiva; pero no creo sea necesario dar énfasis a tales puntos, de los que posiblemente ustedes están más al tanto de lo que yo pueda estar.

Catorce años de edad. En el aspecto "experimental" ésta es la edad en que se introduce la idea del gráfico de una función y no se deberá ciertamente posponer por más tiempo. A esta idea debe relacionarse inmediatamente el método general de resolver una ecuación $f(x)$ igual O con la ayuda del gráfico de y igual $f(x)$, y los variados procesos de aproximación (Lagrange, Newton), que se derivan de esta idea, para la computación numérica de las raíces.

El énfasis debería estar aquí en las soluciones aproximables y nunca en las llamadas fórmulas "resolventes" para las raíces; deberá advertirse al estudiante no esperar nunca de esas fórmulas, salvo en circunstancias extremadamente especiales. En particular, debe mencionarse apenas en esta etapa la fórmula para resolver una ecuación cuadrática y no se debería dedicar estudio alguno a ese tipo de ecuación —en detrimento de la teoría general— como se hace a menudo en muchos países (especialmente en Francia).

Del lado de la "lógica" parece que éste es el momento, después de varios años de álgebra, para una descripción axiomática de los números reales. No quiero decir con esto, por supuesto, la construcción tradicional de los números reales por las secciones de Dedeking o las sucesiones fundamentales de Cantor partiendo de los números racionales. A este nivel (y aún mucho después) esta construcción extremadamente abstracta no tiene ningún significado y deberia reservarse a los materiales especializados.

Me refiero a algo más corriente (y también algo mucho más útil e ilustrativo). Consiste solamente en enumerar las propiedades básicas de los números reales, de las cuales todas las otras pueden derivarse lógicamente. Es bien sabido que estas propiedades pueden resumirse diciendo que los números reales forman un cuerpo ordenado arquimediano, en el que vale el principio del encaje de intervalos.

No propongo tampoco que se haga en las escuelas secundarias intento alguno de probar los teoremas más dificiles sobre los números reales, tales como la existencia del máximo, o del teorema de Bolzano en la existencia de las raices (aún las polinomiales). Sin embargo, considero que debe expresarse claramente que. estos resultados pueden comprobarse sobre la base de los axiomas, aunque parezcan intuitivos.

Quince años de edad. A esta altura el estudio previo de la geometria plana desde el punto de vista "experimental" habrá preparado al estudiante para la formulación de los axiomas (A) y (B) dados anteriormente. Las consecuencias de estos axiomas deberán ser desarrolladas, por supuesto desde ambos puntos de vista, el algebraico y el geométrico, es decir cualquiera noción deberia ser ofrecida con ambas clases de interpretación. Como de costumbre, se pondrá énfasis en la transformación lineal, sus diversos tipos y los grupos que forman. Por supuesto que las matrices y determinantes de orden 2 aparecen en una forma natural durante este desarrollo.

Una vez hecho esto, el estudio "experimental" de la matemática de la escuela secundaria propiamente dicha ha terminado, ya que todos los axiomas han sido formulados. Pero en el estudio de cualquier teoria hay todavia lugar para cambiar el énfasis, bien al lado técnico o al conceptual de las nociones que se tiene que introducir y, de acuerdo con nuestros principios, cualquiera nueva teoria tiene una oportunidad mejor de ser asimilada a través de sus aspectos técnicos más bien que deteniéndose en los puntos agradables de la deducción lógica.

Esto se aplica en particular al principio del cálculo diferencial para las funciones de una variable, lo que creo es mejor que se enseñe a esta edad. No estoy, por consiguiente, en desacuerdo con la forma en que se imparte esta enseñanza generalmente; siempre que las principales acciones de limite y continuidad hayan sido correctamente definidas, es recomendable pasar por alto las pruebas de todos los teoremas del cálculo (pero no sus enunciados precisos) y concentrarse en las técnicas prácticas del cálculo de derivadas y de su uso para hacer gráficos de funciones y resolver ecuaciones.

Dieciséis años de edad. La parte axiomática deberá desarrollarse más adelante las consecuencias de los axiomas, con un estudio más profundo de los grupos de la geometria plana, y, en particular, el uso de los ángulos y de las funciones trigonométricas. La "medida" de los ángulos deberá ser definida en forma (como un homomorfismo (2) del grupo de los números reales sobre el grupo de rotaciones), pero admitiendo su existencia sin prueba. Con esto viene naturalmente la introducción de los números complejos y de sus interpretaciones geométricas.

Finalmente, un tópico más de interés podria ser la discusión de todas las posibles formas de cuadratura en el plazo, que es equivalente a la clasificación de las cónicas.

En su faz "técnica" se podria comenzar con el estudio de las nociones de primitiva y de área para tipos simple de dominio, con ejemplos elementales. Los estudiantes podrian también empezar a aprender la forma de construir curvas dadas en forma paramétrica.

Diecisiete años de edad. En este último año de escuela secundaria, los axiomas para geometria tridimensional deberian finalmente introducirse junto con sus consecuencias usuales, incluyendo por cierto, el uso de matrices y determinantes del orden 3.

Dentro de los aspectos más técnicos se podria explicar el uso de primitivas para calcular tipos simples de volúmenes, e introducir la noción de coordenadas polares y el método de construcción de una curva dada por una ecuación en coordenadas polares.

Finalmente, a esa edad puede ciertamente definirse y estudiarse los logaritmos y los exponenciales (sin ninguna prueba de existencia), dando énfasis al hecho de que ellos constituyen homomorfismos de grupo.

Para completar este programa permitaseme agregar unas pocas palabras para indicar la forma en que podria conectarse directamente con el programa actual de los primeros años de la universidad. Los temas principales son:

a) álgebra lineal, en su forma general (espacios vectoriales de dimensión arbitraria, teoria general de las matrices y determinantes);

b) formas cuadráticas y espacios euclidianos de dimensión finita;

c) derivadas e integrales de las funciones de varias variables reales con sus diversas aplicaciones. Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales; geometria diferencial elemental;

d) teoria elemental de los espacios métricos, espacios de Banach, el espacio de Hilbert y otros espacios funcionales. Análisis funcional elemental.

El programa proporciona "Interpretaciones" intuitivas inmediatas

Se habrá observado que en todo el programa ha tenido cuidado de no mencionar ningún asunto matemático que no tenga alguna "interpretación" intuitiva inmediata. Esto es, en mi opinión, lo que diferencia la matemática de la escuela secundaria de la de nivel universitario.

En este último nivel debe realmente empezar la abstracción, pero creo que los estudiantes que hayan seguido todo el programa anterior estarán bien preparados, habiendo ya adquirido una base amplia donde explotar en busca de ejemplos de las nociones más abstractas de matemática superior y familiarizarse, por otro lado, con el proceso de axiomatización.

No he mencionado en este programa ningún tipo de "matemática aplicada". Si se ha de introducir ya alguna en la escuela secundaria es cuestión fuera de mi alcance y competencia para afrontarla; pero creo que si tal proposición fuera considerada favorablemente, los fundamentos teóricos para enseñar tales cuestiones, estarian ya a mano.

Para evitar cualquier mal entendido, quiero también señalar que, aunque pueda haber parecido que criticaba severamente la geometria, no deseo disminuir su importancia. Nunca habian desempeñado antes un papel más importante las ideas tomadas de la geometria en las matemáticas superiores, y es tan obvio que las matemáticas aplicadas están basadas en la geometria, que apenas es necesario mencionarlo.

Es esencial la "Intuición del espacio"

Considero, por consiguiente, que una de las principales tareas de la escuela secundaria es ejercitar y desarrollar la intuición del espacio en los estudiantes, y al mismo tiempo colocarlo dentro del marco lógico que le permite usarlo más tarde. No se debe dejar de aprovechar todo lo que pueda servir para alcanzar esta meta tan pronto y del modo más completo posible.

Mi desacuerdo no es, por consiguiente, con el objetivo, sino con los *métodos* de la enseñanza de la geometria, y mi principal argumento es que seria mucho mejor basar esa enseñanza no en nociones artificiales y resultados que no tienen significación en la mayoria de las aplicaciones, sino en las nociones básicas que regirán e iluminarán cada cuestión en la que intervenga la geometria.

Por ejemplo, mientras que la noción de vector tiene primordial importancia en todos los aspectos de la ciencia moderna, la noción de triángulo es artificial, prácticamente sin ninguna aplicación fuera de los campos altamente especializados de la astronomia y la geodesia.

¿Por qué ha de insistirse en hacerlo la base de la geometria elemental, excepto por el accidente histórico de que por falta de mejores instrumentos este procedimiento fuera el usado por Euclides? ¿Debemos seguir ciegamente y en forma indefinida adheridos a la tradición y cerrar los ojos a la aplastante evidencia de que hay muchas formas mejores de hacer las mismas cosas? Me niego a creer que nuestra profesión se encuentre tan carente de audacia e imaginación.

NOTAS

1Ese grupo se denomina a veces (impropiamente) el "grupo de movimientos" en el plano, y consiste de las transformaciones, que dejan invariables las distancias (de allí su nombre, "isometria").

2i.e aplicación que ha cada número real *(x)* asocia un ángulo *(A) (x)*, tal como *(A) (x + y)* más *(A) (x) + (A) (y)*.

NO IMITAR A LA NATURALEZA

El artista no debe ser tan verdadero, tan concienzudo, frente a la naturaleza. La más fiel imitación de la naturaleza no basta para que se produzca la obra de arte. Pero una obra de arte puede mostrarnos casi toda la naturaleza y merecer nuestra loa.

JOHANN WOLFGANG GOETHE