

REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS LICEOS (SECONDARY SCHOOLS) DE ESTADOS UNIDOS

por el prof. Dr. HOWARD F. FEHR

(Especialmente autorizado y traducido por el prof. Kurt Legrady)

El profesor Dr. H. F. Fehr es Jefe del Departamento de Enseñanza de las Matemáticas en el Teachers College de Columbia University, New York, Presidente del National Council of Teachers of Mathematics, miembro de diferentes comités de la Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK) y de la Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board, fundado en 1955 en Estados Unidos. Las líneas que siguen, representan una adaptación al castellano autorizada por el autor de la versión en alemán que apareció en los "Mathematisch-Physikalische Semesterberichte" Bd. VII, Heft 2.

En el octavo congreso de la juventud comunista soviética, que tuvo lugar en mayo del año 1928 en Moscú, Stalin dijo: "Delante de nosotros se halla una fortaleza; esta fortaleza es la ciencia, con sus diversas ramificaciones del saber. Nosotros debemos tomarnos esta fortaleza, cueste lo que cueste. Sobre todo la *juventud* debe tomarse esta fortaleza, si es que quiere ser la elaboradora de una nueva vida. Dominar las ciencias, formar un *nuevo* equipo de especialistas de todos los campos de la ciencia, investigar y volver a investigar, esa es nuestra tarea. Lo que necesitamos hoy es la marcha de la juventud revolucionaria hacia las ciencias". En 1958 fuimos testigos del éxito de este programa propuesto hace treinta años. Al mismo tiempo se nos han abierto los ojos respecto a muchas deficiencias en nuestro propio plan educacional. Si hoy nos dedicamos a revisar y mejorar nuestro programa educacional, no será por supuesto necesario ponerlo de acuerdo al del país ruso o al de cualquier otro país. Es más impor-

ante, en realidad, considerarlo bajo nuestro propio punto de vista, respecto a la educación de toda la juventud americana, poniéndolo de acuerdo con nuestras necesidades culturales y económicas.

EL PLAN EDUCACIONAL ACTUAL EN LOS HIGH SCHOOLS DE LOS EE. UU.

El plan de enseñanza en que se basa el actual sistema de clases de matemáticas en los High Schools, pertenece al pasado. Está orientado hacia la física del siglo diecinueve y por lo tanto ya está anticuado y no adecuado para las exigencias a que quedarán sometidos los alumnos de los High Schools en el futuro. El plan de enseñanza del futuro deberá corresponder a las exigencias actuales de las matemáticas, de la física, de la biología, de las ciencias de ingeniería, de la tecnología, del planeamiento industrial y de los otros campos de acción humanos, tomando en cuenta el proceso de desarrollo de los Estados Unidos en la segunda mitad del siglo veinte.

En cuanto a despertar interés y gusto por el estudio continuado de las matemáticas, el actual séptimo y octavo años escolares, en este sentido son más bien un obstáculo. Estos dos años se malgastan, especialmente por el hecho de estar dedicados a volver a enseñar la aritmética de los primeros seis años y tanto más cuanto que esto se hace mediante esa árida repetición que se acostumbra para lograr un saber rutinario. Lo único nuevo es el cálculo de porcentajes y sus

olicaciones llevadas a un extremo odioso sobre problemas comerciales o relacionados con nuestra sociedad. Lo que se enseña en geometría no es otra cosa que un simple medir y el álgebra falta completamente. Se puede decir, con seguridad, que la mayoría de los niños no aprende prácticamente nada nuevo en estos dos años en cuanto se refiere a matemáticas; lo único que se hace es meterles aritmética a la fuerza. La enseñanza de matemáticas en el noveno año escar se refiere, hoy en día, generalmente a los elementos del álgebra. ¿En qué consiste esta enseñanza? En el puro manejo de símbolos sin que aparezcan claramente las estructuras de este sistema.

¿quién no interviene demostraciones, ningún sistema axiomático, ningún término no definido (undefined-term), sino generalmente simples modos de empleo. Designaciones tales como números literales, números enterales, incógnitas, números algebraicos, etc., generalmente no poseen un significado claro, e incluso, a cual es peor aún, llegan a producir confusiones. El niño bien el alumno aprende a resolver ecuaciones, pero no llega a saber lo que es una ecuación. No aprende qué tipo de operaciones son lícitas con ecuaciones y cuáles son las razones para ello. No aprende lo que significa la solución de una ecuación. Si se le pide aplicar estos conocimientos a problemas "realistas" o a problemas prácticos, fracasa generalmente. e ha podido mostrar muy a menudo que un alumno aprende un sinnúmero de operaciones que seguirán siendo de poca importancia para él y las cuales no pueden aplicarse a problemas específicos.

En el décimo y undécimo años escolares, el estudio del álgebra se continúa bajo la designación de álgebra intermedia ("intermediate algebra"). ¿En qué forma? En primer término, revisando el álgebra rutinaria del noveno año escolar en la misma forma, sólo que ahora se resuelven problemas más complicados; el alumno aprende luego "cómo" debe manejar las potencias, los logaritmos, los sistemas de ecuaciones, progresiones y desarrollos binomiales, sin ninguna indicación de que una demostración en un sistema axiomático es tan importante y fundamental para el álgebra como para la geometría. En el caso de que se es introduzca en otros campos, se lo hace generalmente en el análisis combinatorio y el cálculo de probabilidades. Pero estos temas se enseñan en una forma completamente anticuada, que no es adecuada para la aplicación a problemas estadísticos modernos. El concepto de función como se lo trata en la mayoría de los textos escolares, ya no es aceptado, hoy en día, por los matemáticos y por lo demás contribuye muy poco a la comprensión de este concepto tan importante para todas las matemáticas.

En el décimo y decimoprimer año escolar, el alumno llega a conocer también la geometría plana, mejor

dicho, la geometría sintética plana euclidiana. ¿Qué es lo que aprende aquí? Se le introduce a la física del plano mediante el uso de definiciones y de términos no definidos mediante ciertas suposiciones básicas. Luego se acumulan, durante todo un año, teoremas que conducen en la mayoría de los casos a una aglomeración de materia aprendida de memoria. Al término del año, el alumno tal vez adquiera mayor agilidad en el tratamiento de problemas que requieren demostración, supuestamente originales ("so called" originals), pero ¿habrá llegado a ser verdaderamente un mejor matemático, con una verdadera comprensión de la estructura axiomática de las matemáticas? La respuesta debe ser, no.

El decimosegundo año escolar en los High Schools americanos es la calamidad más grande del sistema completo de enseñanza de las matemáticas. Medio año de geometría del espacio no contribuye en nada a la comprensión de las estructuras matemáticas; la trigonometría esférica que podría tratarse como un campo global muy bonito, se pierde bajo una aglomeración de aplicaciones inútiles; lo que es realmente provechoso en este tema, podría ser enseñado en dos o tres semanas.

Para exagerar aún más la situación, tenemos un semestre de trigonometría que se completa generalmente con dos meses de ejercicios dedicados a resolver triángulos. La introducción de ángulos cualesquiera y el enunciado de fórmulas goniométricas contribuye muy poco, tal como se lo realiza, a la comprensión de una trigonometría que es de importancia para un estudio más avanzado de las matemáticas.

LA SOCIEDAD MODERNA REQUIERE MATEMÁTICAS

Antes de proponer un programa de enseñanza nuevo para las matemáticas, será necesario dirigir nuestra atención hacia el papel cada vez más importante que éstas desempeñan dentro de nuestra civilización. No me refiero aquí a todas las relaciones que tienen con el sistema educacional ni a las necesidades matemáticas de cada ciudadano en el marco de su formación general.

Baste señalar que todo ciudadano debe poseer un saber práctico de aritmética, álgebra elemental, relaciones geométricas y procedimientos de medición. Todos los alumnos de los Secondary Schools debieran dedicarse a las matemáticas hasta que hayan aprendido estos hechos, conceptos y habilidades necesarios. Aquí quiero referirme a las necesidades matemáticas más nuevas y profundas de la sociedad. La aplicación de las matemáticas a otras ciencias y a diferentes campos de la vida de la comunidad, ha aumentado enormemente en los últimos decenios y se halla en continuo crecimiento en la física, en las ciencias de ingeniería

y en la técnica, en las cuales siempre han tenido importancia fundamental. Ultimamente se han aplicado también métodos matemáticos a otros campos, tales como el planeamiento industrial, la medicina, la bioquímica, la biofísica y la sociología. Incluso problemas de filosofía y lingüística se abordan mediante métodos de lógica matemática. Es importante hacer notar que esta extensión múltiple del campo de aplicación de las matemáticas no se ha debido a ninguna propaganda hecha al método matemático, a pesar de que las primeras aplicaciones han sido desarrolladas por los propios matemáticos. La situación citada se ha producido por el hecho de que los investigadores se han dado cuenta por sí solos de que carecían de medios completos si no dominaban los métodos matemáticos.

La multiplicidad de las disciplinas matemáticas ha aumentado considerablemente en los últimos sesenta años. Sobre la base de métodos matemáticos, nuevos campos del saber han sido abiertos. Entre éstos puede citarse el planeamiento de experimentos, el estudio matemático de poblaciones, el cálculo de riesgo, lógica simbólica, biomatemática, análisis factorial, control de calidad, teoría de comunicación, teoría de información, teoría de los juegos de estrategia, programación lineal, teoría de decisión estadística, etc. Aunque no todas estas teorías hayan producido resultados prácticos que pudiesen compararse con el contenido principal de las mismas teorías, el criterio de los investigadores tiende a aceptar el hecho de que el tratamiento matemático ha sido en conjunto ventajoso.

Los mismos matemáticos están creando nuevas ramas de las matemáticas puras. Mencionemos la axiomática, el álgebra abstracta, que incluye la teoría de grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales y el álgebra homológica, la topología combinatoria y la geometría algebraica, la teoría de los reticulados, la teoría general de los conjuntos, la teoría de los espacios lineales, el cálculo tensorial y, finalmente, también la metamatemática, que tiene por objeto las matemáticas mismas.

Debo agregar todavía que estos nuevos campos destruyen la antigua división de las matemáticas en aritmética, álgebra y geometría y que hacen aparecer anticuadas muchas de las maneras de tratamiento clásicas de éstas en los High Schools. Debe quedar muy en claro que es el método de tratamiento el anticuado y no el contenido mismo.

El plan de estudios futuro. En vista de las exigencias sobre las matemáticas, de la sociedad, podemos deducir consecuencias con respecto al plan futuro de enseñanza de éstas. Al hacerlo, consideramos tanto al Junior High School como al Senior High School.

El séptimo y octavo años escolar. Los dos primeros años

del Junior High School debieran presentar un tratamiento intuitivo informal de aritmética, geometría y de algunos elementos del álgebra. Más exactamente, un alumno debiera, al final de estos dos años, dominar las cuatro operaciones fundamentales con números enteros, fracciones comunes y números decimales. Con esto se incluye el hecho de que debe poder resolver problemas de cálculo que aparecen en el diario vivir y comprender el sentido del procedimiento de cálculo, el principio del valor relativo de las cifras, en especial en nuestro sistema decimal. También debieran tratarse sistemas de representación con otras bases, especialmente el sistema binario.

La comprensión del concepto de porcentaje es fundamental, especialmente la capacitación para determinar uno de los tres números: numerador, denominador y fracción decimal cuando se dan los otros dos. Valores de porcentajes menores que uno y mayores que cien deberán manejarse en forma segura. Aplicaciones del cálculo de porcentajes a problemas relacionados con el comercio, los intereses, el descuento y el planeamiento económico doméstico, solamente deberán tratarse en forma moderada.

El tratamiento de la aritmética deberá estar dirigido también hacia la comprensión de fracción y razón, hacia el conocimiento de los sistemas de unidades, incluyendo el sistema métrico de longitud, superficie, volumen, peso y hacia la aplicación del cálculo del valor medio. El trabajo debería estar dirigido hacia una introducción natural del álgebra.

La geometría propedéutica deberá comprender la determinación de trayectos, de perímetros y de volúmenes, de regiones poligonales y de regiones limitadas por arcos; deberá comprender también la determinación de la superficie y volumen de cuerpos y la determinación de magnitudes de ángulos (en grados). Junto con esto se aprenderá el uso de la regla graduada (tanto en unidades inglesas como métricas) y del transportador, como también el dibujo a escala y la determinación indirecta de longitudes. Otros conceptos que deberán ser desarrollados son los siguientes: rectas, paralelas, perpendiculares, rectas que se cortan y rectas que se cruzan, en el plano o en el espacio, ángulos agudos, ángulos rectos, ángulos obtusos, ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, triángulos isósceles y equiláteros, triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras, la suma de los ángulos en el triángulo, ángulo interno de un polinomio regular con seis lados o menos. El alumno debe adquirir práctica en el manejo con instrumentos para la construcción de figuras geométricas.

Otras ideas importantes para estos dos años son: la representación de números, mediante trazos y superficies, la lectura y la construcción de diagramas rectangulares, diagramas de trazos, diagramas de cuadros,

dibujos con círculos y diagramas curvilíneos, la interpretación de las fórmulas que dan perímetros, superficies, volúmenes, de fórmulas de cálculo de porcentajes por medio de modelos (en relación con esto); la comprensión de los símbolos que aparecen en las fórmulas y que representan números obtenidos en mediciones y el tratamiento de las fórmulas mismas como expresiones simples y teoremas que contienen variables. Algunos alumnos pueden abarcar esta materia en menos de dos años; cierto número de alumnos menos dotados, necesitarán más de tres años.

ALGEBRA

Los temas que se enseñarán en álgebra serán, en líneas generales, los mismos que hasta aquí se han tratado. La diferencia consistirá en la concepción y se revelará principalmente en conceptos nuevos, una terminología y simbología nuevas y en la introducción de un capítulo bastante grande acerca de desigualdades. La idea de pasar hacia el gráfico unidimensional, por ejemplo, en la representación del conjunto de los puntos que satisfacen $x < 3$ también deberá desarrollarse. *Se tratará de un desplazamiento del acento de las habilidades del cálculo puramente mecánico, hacia la comprensión de las ideas fundamentales y de las leyes básicas.* El estudio de la construcción del sistema numérico, el concepto de variables, relacionadas con el campo respectivo y las leyes fundamentales para la adición y la multiplicación: la ley de conmutatividad, la ley de asociatividad y la ley de distributividad son nuevos puntos de concentración. La aplicación de estas leyes en diferentes campos del álgebra, insistiendo en su generalidad, el significado de ecuaciones y desigualdades de condición y de sus conjuntos de soluciones, requerirán tanta atención como los procedimientos para encontrar estos últimos. Si esta concepción y tratamiento del álgebra sólo significara un estímulo agradable, pero sin valor de por sí, si sólo fuera una representación más abstracta, aun al alcance de los alumnos del High School, o, si sólo fuera una generalización del álgebra del siglo XVII, o un puro juego para matemáticos, entonces podríamos desecharla. ¡Pero no es así! Encuentra aplicación en un sinnúmero de ciencias puras y aplicadas. Las ideas básicas son elementales y son capaces de revelar un significado más profundo que el que hemos tratado de dar con la enseñanza del álgebra. El método de tratamiento es nuevo, puede introducirse casi en cualquier parte en el plan del High School. En consecuencia no podemos permitirnos ignorarla si queremos modernizar nuestra enseñanza en el High School.

La ley de distributividad podríamos recalcarla como ejemplo de un álgebra significativa. Esta ley es el fundamento, tanto para el cálculo mental como para el

cálculo escrito, para la utilización del paréntesis, para la factorización y multiplicación de polinomios y para el manejo de fracciones. Si se ha comprendido la ley, la mayoría de los métodos especiales pueden ahorrarse en el tratamiento de estos tópicos.

La enseñanza del álgebra se profundiza, luego, mediante la introducción del raciocinio deductivo, una manera de pensar que debiera ejercitarse en todas las partes de las matemáticas escolares y no solamente en la geometría. Así puede librarse la geometría de aquella carga de constituir la única disciplina elaborada en forma deductiva en el colegio. Los mismos alumnos fijan ciertas proposiciones y definiciones, toman ciertos términos no definidos y demuestran entonces, por ejemplo, que el cuadrado de un número impar resulta ser impar y siempre excede en uno a un múltiplo de ocho. Mediante tales deducciones se relacionan varios conocimientos parciales y en la comprensión se profundiza y memoriza con más facilidad. A través de toda la enseñanza elaborada en este sentido se utilizarán los conceptos y el lenguaje de la teoría de los conjuntos. El concepto ingenuo de conjunto es elemental y está íntimamente ligado a la experiencia. Con él se puede combinar un sinnúmero de preguntas que crean y exigen un modo de pensar creativo y productivo. Es uno de los conceptos fundamentales unificadores y generalizadores de todas las matemáticas. La interpretación basada en la teoría de conjuntos es de suma importancia.

GEOMETRIA

El nuevo programa de geometría se diferenciará fundamentalmente del actual. El tiempo que se acostumbraba fijar en un año y medio para pasar la geometría plana y la geometría del espacio, se reducirá a un lapso considerablemente menor que un año. La geometría del espacio, en forma de un curso semestral, tratada de manera deductiva se eliminará completamente. Aquellas partes de la geometría del espacio que parecen ser importantes, se desarrollarán inmediatamente y en forma paralela a las partes respectivas de la geometría plana. El tratamiento de la esfera puede coordinarse con el del círculo; el concepto del lugar geométrico se introducirá simultáneamente en dos y tres dimensiones. A medir y construir se aprenderá en la geometría del espacio de una manera intuitiva. Como a través de toda la enseñanza de las matemáticas se recalcará el método deductivo, no será necesario emplear un año en la deducción de teoremas y en la resolución de problemas de construcción de la geometría sintética. El estudio de la geometría plana sintética comenzará con una reseña, conscientemente elaborada, hacia las ideas fundamentales de la geometría, a la cual se agregará un comentario

referente al raciocinio deductivo. El estudio estricto de la geometría, comenzará con el postulado de los teoremas de congruencia y se avanzará, tan rápidamente como sea posible, a lo largo de una cadena de seis u ocho teoremas fundamentales que conduzcan a la demostración del teorema de Pitágoras. Para esto es suficiente un tercio de año.

Después del tratamiento del teorema de Pitágoras será posible pasar a la geometría analítica donde se comenzará con el desarrollo de los conceptos fundamentales: distancia, división de un segmento, pendiente, la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia. Con esto el alumno poseerá una geometría nueva y más eficaz. Para la demostración de teoremas y para poder abarcar problemas de construcción, ya dispondrá de métodos tanto analíticos como sintéticos.

TRIGONOMETRIA

El método vectorial es otro método de auxilio, que es de gran importancia en la física como también en el estudio matemático posterior. Una introducción al cálculo vectorial empleando ciertos conocimientos básicos y términos no definidos y estudiando translaciones, la multiplicación por un escalar, la adición y sustracción, le suministrará al alumno otra herramienta para la demostración de teoremas geométricos y la resolución de problemas cinemáticos. El tratamiento de los vectores en el plano, también permite un acceso a la trigonometría en que se puede desarrollar la periodicidad de las funciones angulares en forma inmediata.

Hoy en día la enseñanza de las funciones trigonométricas constituye una parte importante del análisis y difícilmente existe una razón de peso que justifique el tratarlas por sí solas. Las funciones trigonométricas de los números reales se desarrollarán como *Wrapping-functions* (término didáctico) del eje real y la función seno quedará entonces definida inmediatamente para todos los números reales, repitiendo sus valores periódicamente con 2π , es decir, $f(x + 2\pi) = f(x)$. Este comportamiento permite la aplicación de la trigonometría a un gran número de fenómenos periódicos, como por ejemplo ondas luminosas y acústicas, corrientes alternas, ciclos económicos, conducción de calor, etc.; juega un papel importante en el análisis armónico.

La trigonometría se relaciona desde un comienzo con sistemas de coordenadas tanto cartesianas como polares. Debe insistirse en que las coordenadas deberán destacarse en toda la enseñanza de las matemáticas en el futuro. Esto constituirá un punto de vista fundamental. La determinación de elementos de triángulos jugará un papel menos importante y se reducirá a la aplicación de las leyes de las funciones seno y

coseno, sin utilización de logaritmos. El tratamiento logarítmico era hace cincuenta años un método rápido, pero está ya anticuado con la introducción de máquinas calculadoras electrónicas. Se le dará importancia fundamental a la parte analítica de la trigonometría. Antes, lo más importante era la determinación de triángulos planos y esféricos en combinación con las aplicaciones en topografía y navegación; mientras que en las aplicaciones más modernas de la trigonometría lo son las funciones del círculo para todos los números reales. El estudio de estas funciones se aliviará considerablemente mediante la interpretación de las funciones como conjuntos de pares ordenados de números. Las fórmulas tradicionales se obtendrán mediante la ayuda de la geometría coordenada en que se destacará la concepción de la trigonometría como el estudio de funciones periódicas. Las matemáticas esbozadas en la forma que precede deberán ser el objeto del noveno hasta el decimoprimer años escolares. *El decimosegundo año escolar.* Suprimiendo algunas partes del álgebra tradicional y una parte considerable de la geometría euclidiana, nos queda tiempo para redondear el plan de estudios de los High Schools mediante el tratamiento de aquellos campos del álgebra que debieran llamarse, en realidad, análisis moderno. Se tratará aquí del estudio de funciones elementales como funciones algebraicas (racionales enteras, racionales e irracionales), funciones logarítmicas, trigonométricas y las funciones inversas correspondientes. Esto conduce además al tratamiento del valor absoluto y del concepto de límite y a una introducción al cálculo diferencial para polinomios que deberá dirigirse hacia un entendimiento y aclaración de los conceptos y que no deberá darse en una forma puramente formal, según reglas mecánicas.

Deberá tratarse otro punto más, que será de importancia para el plan futuro, este es la teoría de las probabilidades y la estadística.

Muchas aplicaciones nuevas de las matemáticas se refieren a fenómenos que están gobernados por el azar y se fundamentan, por lo tanto, en afirmaciones probabilísticas y en inferencia, o juicios de tipo estadístico. Estas aplicaciones abarcan problemas del seguro, de la genética, de vida media, del planeamiento industrial, del cálculo de costos de la vida, de la elección profesional, de "tests" del control de mediciones, de la investigación acerca de las opiniones de la teoría de los juegos, etc. El raciocinio estadístico desempeña un papel cada vez más importante en la vida del hombre culto. Una introducción a la formación del juicio de tipo estadístico basada en raciocinios de tipo probabilístico es tan importante como el estudio de sistemas deductivos basados en raciocinios apodicticos.

En lugar de estos capítulos sobre estadística y la teoría de probabilidades, la enseñanza puede ocuparse

perfectamente, también, de un primer curso de álgebra moderna que incluya el tratamiento de matrices y los conceptos de conjunto, grupo, anillo y cuerpo.

RESUMEN

La meta de la formación matemática esbozada, consiste en preparar a aquellos que estén capacitados para estudiar ciencias naturales, matemáticas, tecnología o ciencias de ingeniería, para que puedan ingresar a un "college" y seguir allí un curso elemental estricto de cálculo infinitesimal (freshman course). Si un matemático del siglo XVII tuviera la oportunidad de aparecer nuevamente en la tierra podría pasar, sin ninguna preparación, a las salas de clases de nuestros High Schools y dictar las clases actuales tradicionales; tanto es el atraso en que se encuentra esta enseñanza con respecto a nuestro tiempo. Para poder realizar la enseñanza, sin embargo, de la manera aquí propuesta, el matemático del siglo XVII se encontraría completamente perdido y tendría primero que ponerse al día en todos los conceptos básicos y en todos los tópicos de las matemáticas tratados en los High Schools: álgebra, geometría, trigonometría, cálculo infinitesimal, estadística y lógica. Por sobre todo eso tendría que captar el modo de pensar en las matemáticas modernas, que se introdujo en el siglo XX, un modo de pensar del que podríamos considerar como muestra el pensar conceptual (patterns of thought) y las estructuras matemáticas generales más bien que trucos y procedimientos especiales. En este sentido la elaboración propuesta de las matemáticas está íntimamente relacionada con el futuro. En este sentido los profesores que ya se encuentran en su profesión, debieran estudiar algo de matemáticas modernas y el programa de formación de profesores debiera reformarse. Finalmente, quisiera decir algo respecto a aquellos que asisten a los High Schools sin estar capacitados para el "college", o que no tienen la intención de ir al "college". Los cursos y textos actuales son para estos alumnos una subdivisión de un sinnúmero de pedazos sin sentido, de una enorme cantidad de cosas total-

mente diversas. En ninguno de estos libros o cursos existe un orden intrínseco, una estructuración o un desarrollo sistemático de las matemáticas. Es mi opinión que las matemáticas deben estar de acuerdo, para estos alumnos, con la estructura elemental propuesta por nosotros. En el estudio de las matemáticas debería existir un solo camino en que puedan avanzar los alumnos según sus capacidades intelectuales.

APENDICE

Programa para llegar al grado que da el "college", presentado por la *Comission on Mathematics*:

- 1º Preparación intensiva en el cálculo infinitesimal y geometría analítica al nivel del "college", mediante una ejercitación tanto conceptual como técnica;
- 2º Despertar la comprensión de la esencia y el significado del pensar deductivo tanto en el álgebra como en la geometría;
- 3º Acentuación de la estructura matemática ("patterns") por ejemplo de las propiedades de los números naturales, racionales, reales y complejos;
- 4º Aplicación consciente de los conceptos fundamentales: conjunto, variable, función y relación;
- 5º Tratamiento de inequaciones paralelamente con el tratamiento de ecuaciones;
- 6º Combinación temprana de la geometría coordinada con la geometría plana y los hechos e ideas fundamentales de la geometría del espacio;
- 7º Introducción de la trigonometría en el décimo-primer año escolar, a base de coordenadas, vectores y números complejos;
- 8º Tratamiento preferente de las funciones elementales (polinomios, funciones exponenciales, funciones circulares y las funciones inversas correspondientes) en el decimosegundo año escolar;
- 9º Recomendaciones como campos optativos, adicionales en el decimosegundo año escolar: una introducción a la teoría de las probabilidades con aplicaciones a la estadística, o una introducción al álgebra moderna.