

## EFFECTOS DE FUERZAS HORIZONTALES SOBRE MUROS DE ALBAÑILERIA

### PRIMERA PARTE

#### ESTUDIO DEL MURO AISLADO

##### OBJETO DE ESTE ESTUDIO:

Este estudio tiene por objeto establecer fórmulas para el cálculo de la deformación de los muros de albañilería de ladrillo que forman parte de un edificio por efecto de acciones horizontales, y determinación consiguiente de la repartición de estas solicitaciones entre sus elementos resistentes (muros y estructuras de concreto armado).

Consideramos un muro  $d$ , longitud de ancho  $b$ , y altura  $h$  empotrado en la base y en cuyo extremo libre suponemos aplicados una fuerza vertical  $p \cdot d$  (siendo  $p$  la carga por unidad de largo del muro) y una fuerza horizontal  $Q$  (fig. 1). Nos proponemos en primer término determinar la deformación en el extremo libre de este muro por efecto de dichas fuerzas.

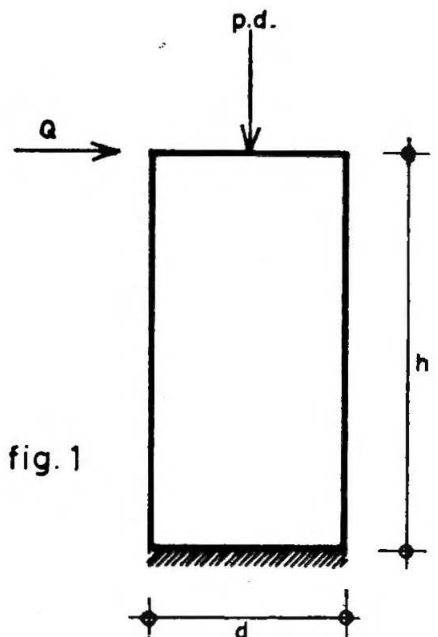
Distinguimos en este problema dos casos según que la resultante de las fuerzas  $p \cdot d$  y  $Q$  incida en la base dentro o fuera del tercio central. Siendo la excentricidad  $e$

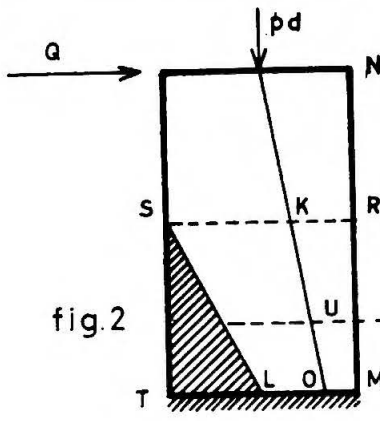
$$e = \frac{Qh}{p \cdot d}$$

En el primer caso  $e \leq 1/6 d$  o sea se cumple la condición

$$\frac{2Qh}{p \cdot d^2} \leq 1/3$$

En el segundo caso  $e = 1/6 d$  o sea se cumple la condición





$$\frac{2Qh}{pd^2} \geq 1/3$$

PRIMER CASO:  $\frac{2Qh}{pd^2} \leq 1/3$

Este caso, en que se produce exclusivamente fatigas normales de compresión, está suficientemente estudiado, limitándonos a reproducir las fórmulas conocidas con las notaciones adoptadas.

La deformación en el extremo libre debido a la flexión es

$$Z \text{ flexión} = \frac{4Qh^3}{Eb d^3}$$

La deformación en el extremo libre debido al esfuerzo de corte es

$$Z \text{ corte} = \frac{3Qh}{Ebh}$$

La deformación total por esfuerzo de corte y flexión combinados es

$$1) \quad Z = \frac{4Qh^3}{Ebd^3} \left( 1 + 3/4 \left( \frac{d}{h} \right)^2 \right)$$

A fin de relacionar esta fórmula con la que obtendremos en el caso 2.º la transformamos en

$$1') \quad \frac{Eb z}{hp} = \frac{2}{\frac{d}{h}} \cdot \frac{2Qh}{pd^2} \left( 1 + 3/4 \left( \frac{d}{h} \right)^2 \right)$$

o sea expresamos  $\frac{Eb}{hp} Z$  en función de  $\frac{d}{h}$  y  $\frac{2Qh}{pd^2}$

SEGUNDO CASO:  $\frac{2Qh}{pd^2} \geq 1/3$

En este caso se producen no sólo fatigas normales de compresión, sino también de tracción. En fig. 2 la resultante de las fuerzas \$p \cdot d\$ y \$Q\$ incide en el punto \$K\$ en la sección \$SR\$ (sección dividida de modo que \$KR = d/3\$) y en el punto \$O\$ en la base. La recta \$SL\$ trazada de modo que \$LO = 20 M\$ limita las zonas de compresión y tracción. Suponemos que el muro, adoptando la situación más desfavorable, se rompe en la zona traccionada.

En una sección del muro a la altura X las fatigas de compresión se reparten según un triángulo como se indica en fig. 2. La fatiga máxima de compresión es

$$2) \quad \delta^c = \frac{2pd}{3ub}$$

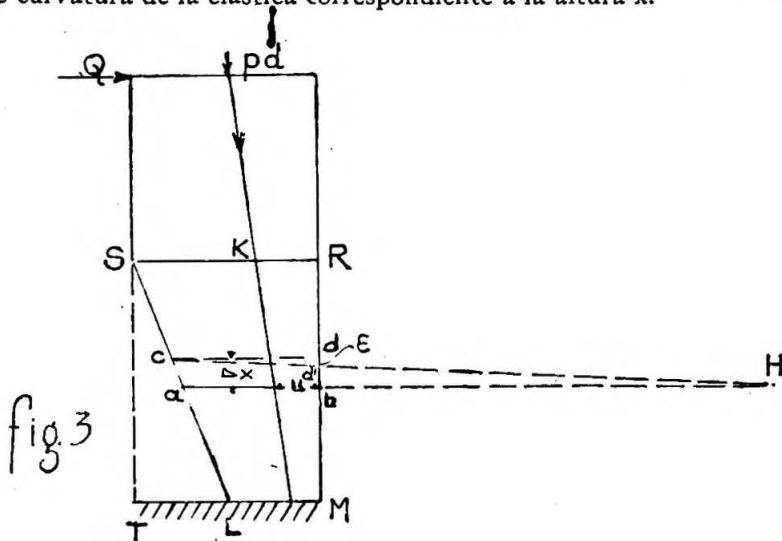
siendo 
$$u = \frac{d}{2} - e$$

### DEFORMACION POR FLEXION Y COMPRESION

Consideramos dos zonas (fig. 3), la primera de M a R y la segunda de R a N. La primera tiene una sección de trabajo variable de LM a-d y la segunda una sección de trabajo constante d.

#### ELÁSTICA EN LA ZONA MR.

Una sección c-d situada a la distancia  $\Delta x$  de la sección a-b, se traslada al deformarse el muro a c-d' cortándose las trazas de ambas secciones en el punto H, centro de curvatura de la elástica correspondiente a la altura x.



Tenemos de la semejanza de los triángulos c-a-H y c-d-d' siendo  $dd' = \xi$  (acortamiento de la fibra db por efecto de la fatiga de compresión) y  $a - H = \rho$  (radio de curvatura de la elástica)

$$\frac{aH}{cd} = \frac{ca}{dd'} \text{ o sea } \frac{\rho}{3u} = \frac{\Delta x}{\xi}$$

Por otra parte, siendo  $\delta$  la fatiga máxima de compresión en la sección ab

$$\delta \cdot \Delta x = E \cdot \xi$$

Luego 
$$\rho = \frac{3uE}{\delta}$$

Combinando con la fórmula 2)

$$\rho = \frac{9u^2 Eb}{2pd}$$

Aceptando

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

Obtenemos la ecuación diferencial

$$3) \quad \frac{d^2x}{d^2z} = \frac{9u^2 Eb}{2pd}$$

Que integramos substituyendo la variable x por u de 2)

$$4) \quad u = \frac{d}{2} - \frac{Q(h-x)}{pd}$$

diferenciando

$$du = \frac{Q \cdot dx}{pd}$$

obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2p^2 d^2}{9EbQ} \left( -\frac{1}{u} + C^{te} \right)$$

Determinamos la constante de integración por las condiciones límites

$$\text{En la base} \quad u = u_0 \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

Luego

$$C^{te} = \frac{1}{u_0}$$

y

$$5) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2p^2 d^2}{9EbQ} \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \right)$$

Integramos nuevamente teniendo presente 4)

$$z = \frac{2p^3 d^3}{9EbQ^2} \left( \frac{u}{u_0} - \text{Log} u + C^{te} \right)$$

Determinamos la constante por las condiciones del límite

$$u = u_0 \quad z = 0$$

$$C^{te} = \text{Log} u_0 - 1$$

Luego

$$6) \quad z = \frac{2p^3 d^3}{9EbQ^2} \left( \frac{u}{u_0} - 1 - \text{Log} \frac{u}{u_0} \right)$$

Las ecuaciones 5) y 6) dan la tangente a la elástica y la deformación en cualquier punto comprendido dentro de la zona MR en función de la variable  $u$ . Interesa determinar los valores extremos de la tangente y la flecha en R que designamos por  $\Theta_R$  y  $Z_R$  respectivamente.

Teniendo presente que  $u_R = \frac{d}{3}$  y

$$7) \quad u_o = \frac{d}{2} - \frac{Qh}{pd} = \frac{d}{2} \left( 1 - \frac{2Qh}{pd^2} \right)$$

$$\Theta_R = \frac{2pd}{9EbQ} \left( \frac{1}{u_o} - \frac{1}{u_R} \right) = \frac{2p^2d}{3EbQ} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2Qh}{pd^2}} - 1 \right)$$

Designando la expresión  $\frac{u_R}{u_o} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2Qh}{pd^2}} = A$

tenemos

$$8) \quad \Theta_R = \frac{2p^2d}{3EbQ} (A - 1)$$

Además de 6) 
$$Z_R = \frac{2p^3d^3}{9EbQ^2} \left( \frac{u_R}{u_o} - 1 - \text{Log} \frac{u_R}{u_o} \right)$$

o sea 9) 
$$Z_R = \frac{2p^3d^3}{2EbQ^2} (A - 1 - \text{Log} A)$$

#### ELÁSTICA EN LA ZONA RN

En la zona RN sólo se producen fatigas de compresión y por lo tanto trabaja toda la sección del muro de ancho  $d$ . La elástica es la que corresponde a un muro sometido a un momento  $Q(h - x)$  producido por la fuerza  $Q$ . Por lo tanto, la deformación en el extremo N es

$$Z_N = \frac{Q(h - x_R)^3}{3EJ} + \Theta_R(h - x_R) + Z_R$$

De 4) 
$$u_R = \frac{d}{3} = \frac{d}{2} - \frac{Q}{pd}(h - x_R)$$

Luego 
$$h - x_R = \frac{pd^2}{6Q}$$

Valor que reemplazado junto con  $J = \frac{1}{12}bd^3$ ,  $\Theta_R$  en la expresión de  $Z_N$  conduce a la fórmula

$$10) \quad Z_N \text{ flexión compresión} = \frac{p^3d^3}{54EbQ^2} (18A - 12 \text{Log} A - 17)$$

DEFORMACION POR ESFUERZO DE CORTE

La deformación por esfuerzo de corte de la que partimos, tiene por expresión

$$Z = \frac{6}{5G} \int \frac{Q}{W} dx$$

ELÁSTICA POR ESFUERZO DE CORTE EN LA ZONA MR

Reemplazando en la expresión anterior los valores de  $w = 3ub$ ,  $G = 2/5 E$  y reemplazando la variable  $dx$  por  $du$  según 4) tenemos

$$Z = \frac{pd}{Eb} \int \frac{1}{u} du = \frac{pd}{Eb} (\text{Log } u + C^{te})$$

para  $u = u_0$   $z = 0$  luego

$$C^{te} = -\text{Log } u_0 \quad \text{luego } Z = \frac{pd}{Eb} \log \frac{u}{u_0}$$

y 11) 
$$Z_R = \frac{pd}{Eb} \text{Log } \frac{u_R}{u_0} = \frac{pd}{Eb} \text{Log } A$$

ELÁSTICA POR ESFUERZO DE CORTE EN LA ZONA RN

Considerando que  $w = d \cdot b$  sección constante en la zona RN, se tiene en la zona RN

$$Z = \frac{3p}{Eb} \int du$$

de donde 
$$Z = \frac{3p}{Eb} (u + C^{te})$$

para  $u = \frac{d}{3}$   $z = Z_R$  
$$C^{te} = \frac{Z_R}{3p} Eb - \frac{d}{3} = \frac{d}{3} (\text{Log } A - 1)$$

luego 
$$Z = \frac{3p}{Eb} \left( u + \frac{d}{3} (\text{Log } A - 1) \right)$$

Siendo 
$$u_N = \frac{d}{2} \text{ resulta}$$

12) 
$$Z_{N\text{corte}} = \frac{pd}{2Eb} (1 + 2 \text{Log } A)$$

### DEFORMACION TOTAL POR FLEXION, COMPRESION Y ESFUERZO DE CORTE COMBINADOS

De 10) y 12) obtenemos la deformación en el extremo N por flexión y esfuerzo de corte combinados

$$Z_N = \frac{p^3 d^3}{54 E b Q^2} (18 A - 12 \text{ Log } A - 17) + \frac{p d}{2 E b} (1 + 2 \text{ Log } A)$$

de la cual deducimos la expresión siguiente que podemos comparar con 1)

$$13) \quad E b Z_N = \frac{2}{27 \left(\frac{d}{h}\right) \left(\frac{2Qh}{p d^2}\right)^2} (18 A - 12 \text{ Log } A - 17) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{h}\right) (1 + 2 \text{ Log } A)$$

o sea expresamos  $\frac{E b}{h p} Z_N$  en función de  $\frac{d}{h}$  y  $\frac{2Qh}{p d^2}$

Puede observarse que tanto las expresiones 1) como la 13) se identifican para  $\frac{2Qh}{p d^2} = 1/3$  y que la deformación se hace infinita en la expresión 13) para  $\frac{2Qh}{p d^2} = 1$  que señala la condición mecánica del volcamiento.

Hemos tabulado las fórmulas 1) y 13) a fin de permitir su aplicación práctica. (Tabla 1)

Es interesante dejar constancia que en la práctica del cálculo sísmico se utiliza actualmente la fórmula 1). Según ella, el valor  $\frac{d}{h}$  que determina igual deformación por esfuerzo de corte como por flexión se deduce de

$$\frac{3}{4} \left(\frac{d}{h}\right)^2 = 1 \quad \text{o sea} \quad \frac{d}{h} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,15$$

Esto indica la aceptación de que para valores  $\frac{d}{h} > 1,15$  prima el esfuerzo de corte y que para valores  $\frac{d}{h} < 1,15$  prima la flexión para los efectos de la deformación.

Ahora mediante el cálculo que hemos desarrollado, sabemos que esto es aceptable sólo para valores  $\frac{2Qh}{p d^2} \leq 1/3$ . Para valores  $\frac{2Qh}{p d^2} \geq$  el valor  $\frac{d}{h}$  que hace igual ambas deformaciones se deduce de

$$\frac{2}{27 \frac{d}{h} \left(\frac{2Qh}{p d^2}\right)^2} (18 A - 12 \text{ Log } A - 17) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{h}\right) (1 + 1 \text{ Log } A)$$

de donde 14)  $\frac{d}{h} = \frac{2}{\frac{2Qh}{p d^2}} \sqrt{\frac{18 A - 12 \text{ Log } A - 17}{27 (1 + 2 \text{ Log } A)}}$

De esta fórmula deducimos que para los efectos de la deformación siendo

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 0,75 \quad \text{prima el esfuerzo de corte para } \frac{d}{h} > 1,34$$

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 0,90 \quad \text{prima el esfuerzo de corte para } \frac{d}{h} > 1,78$$

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 0,99 \quad \text{prima el esfuerzo de corte para } \frac{d}{h} > 4.22$$

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 1 \quad \text{prima el esfuerzo de corte para } \frac{d}{h} = \infty$$

En igual forma la fórmula 14) indica, como es fácil deducir, el valor  $\frac{d}{h}$  que hace mínimo el valor de la deformación manteniendo constante el valor de  $\frac{2Qh}{p d^2}$

#### FORMULA SIMPLIFICADA DE LA DEFORMACION

Siendo  $z_{\min}$  el valor mínimo de la deformación que corresponde a un determinado  $\frac{2Qh}{p d^2}$  lo expresamos en la forma siguiente siendo  $a$  y  $n$  coeficientes por determinar

$$15) \quad \frac{Eb}{p h} Z_{\min.} = a \left( \frac{2Qh}{p d^2} \right)^n$$

Aplicando logaritmos decimales

$$\log \frac{Eb}{p h} Z_{\min.} = \log a + n \log \frac{2Qh}{p d^2}$$

De la tabla 1) obtenemos para

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 0,333 \quad \frac{Eb}{p h} Z_{\min.} = 1,15$$

$$\frac{2Qh}{p d^2} = 0,75 \quad \frac{Eb}{p h} Z_{\min.} = 3,78$$

Por lo tanto, podemos establecer las ecuaciones

$$\log 1,15 = \log a + n \log 0,333$$

$$\log 3,78 = \log a + n \log 0,75$$

de donde deducimos 
$$n = \frac{\log 3,78 - \log 1,15}{\log 0,75 - \log 0,333} = 1,46 \sim \frac{3}{2}$$





De la fórmula 15) reemplazando  $n = \frac{3}{2}$  y  $\frac{Eb}{hp} Z_{\min.} = 1,16$  y  $\frac{2Qh}{p d^2} = 0,333$

$$a = \frac{1,16}{\sqrt{0,333^3}} = 6,02 \sim 6,00$$

Luego 
$$\frac{Eb}{ph} Z_{\min.} = 6,00 \left( \frac{2Qh}{p d^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Esta fórmula aproximada nos da el mínimo de la deformación para un valor dado de  $\frac{2Qh}{p d^2}$  que corresponde a un determinado  $\frac{d}{h}$ . Siguiendo este mismo orden de simplificaciones adoptamos para la deformación cualquiera que sea el  $\frac{d}{h}$  el valor intermedio 10% mayor que el mínimo, o sea

$$16) \quad \frac{Eb}{hp} Z = 6,6 \left( \frac{2Qh}{p d^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Con esta fórmula se obtiene un 20% de error máximo dentro de los límites

$\frac{2Qh}{p d^2}$	$\frac{d}{h}$
0,25	0,7 — 2,4
0,333	0,4 — 3,00
0,80	0,7 — 2,4

Incluimos un gráfico que permite comparar la curva que representa la fórmula aproximada y la curva que da los valores promedios de  $\frac{E bz}{h}$  dentro de los límites señalados de aplicación de la fórmula aproximada.

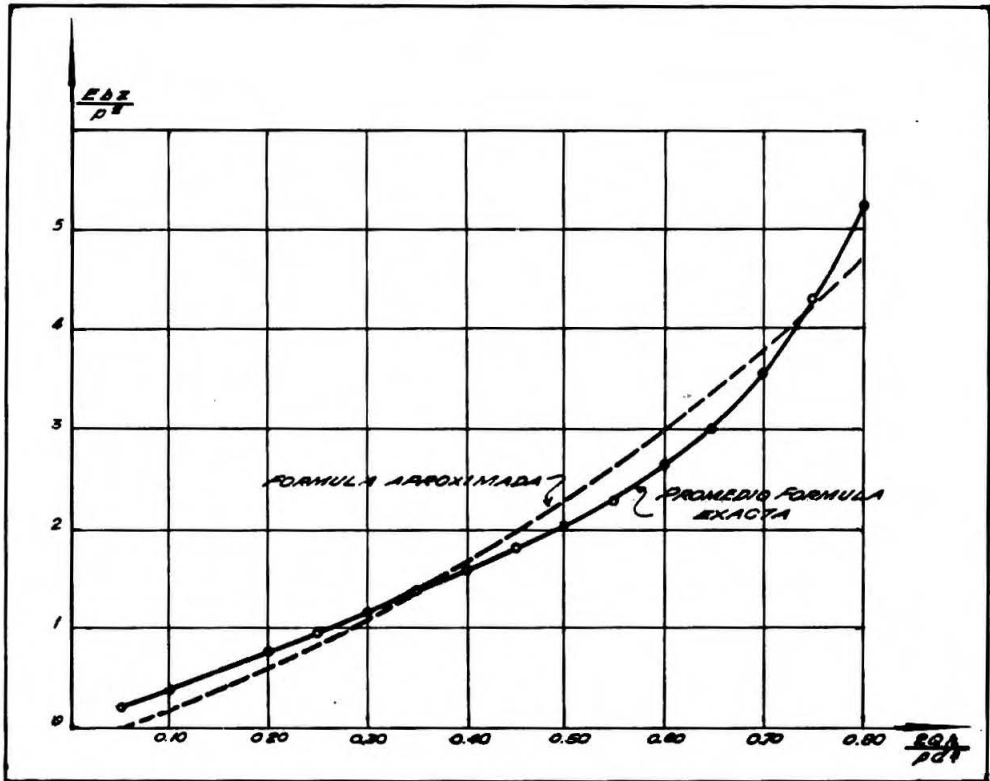
En el estudio de la deformación de un conjunto de muros por efecto de una fuerza Q dada la pequeña influencia de los muros de poco ancho (por influir el cuadrado de d) en relación a los muros de ancho apreciable en la deformación de conjunto, no hay inconveniente en la aplicación de la fórmula 16) extendida hasta valores de  $\frac{d}{h} = 0,2$

#### VERIFICACION A LA COMPRESION

Siendo  $\frac{2Qh}{p d^2} \leq 0,333$  la máxima fátiga de compresión es en la base

$$\delta_c = \frac{Qh}{\frac{1}{6} b d^2} + \frac{pd}{bd} = \frac{3p}{b} \frac{2Qh}{p d^2} + \frac{p}{b}$$

$$17) \quad \delta_c = \frac{3p}{b} \left( \frac{2Qh}{d p^2} + \frac{1}{3} \right)$$



Siendo  $\frac{2Qh}{p d^2} \geq 0,333$  la máxima fatiga de compresión es en la base según 2) y 7)

$$18) \quad \delta_c = \frac{3pd}{3u_0b} = \frac{4 p}{3b \left(1 - \frac{2Qh}{p d^2}\right)}$$

#### VERIFICACION AL ESFUERZO DE CORTE

Siendo  $\frac{2Qh}{p d^2} \leq 0,333$  la fatiga de corte es

$$19) \quad t = \frac{Q}{bd}$$

Siendo  $\frac{2Qh}{p d^2} \geq 0,333$  la fatiga de corte está dada por

$$t = \frac{Q}{b 3u_0}$$

Reemplazando  $u_0$  dado por 7) se obtiene

$$20) \quad t = \frac{2Q}{3bd \left(1 - \frac{2Qh}{p d^2}\right)}$$

**EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

1.º *Ejemplo:* Sea un muro de albañilería de ladrillo con las siguientes características  $h = 3.00$  mts.  $b = 0,30$  mts.  $d = 3,50$  mts. y sometido a las cargas  $p = 9.000$  kgs/m. y  $Q = 5.000$  kgs.

$$\text{Tenemos} \quad \frac{2Qh}{d p^2} = \frac{2.5000.3}{90000 \cdot 3,5^2} = 0,27 < 0,333$$

$$\text{De la Tabla 1 obtenemos} \quad \frac{Eb}{hp} Z = 0,94$$

$$\text{de donde} \quad Z = \frac{1}{E} \frac{0,94 hp}{b} = \frac{1}{E} \frac{0,94.3.9000}{0,30} = \frac{1}{E} 85000$$

Tomando un módulo de Young para el ladrillo  $E = 30.000$  Kgs/cms<sup>2</sup>.

$$Z = 2,8 \text{ cms.}$$

Según la fórmula aproximada 16)

$$\frac{Eb}{hp} Z = 6,6 \left( \frac{2Qh}{p d^2} \right)^{\frac{5}{2}} = 6,6 \sqrt{0,27^5} = 0,94$$

valor que coincide con el dado por la tabla.

La fatiga de compresión es según e 17)

$$\delta_c = \frac{3p}{b} \left( \frac{2Qh}{p d^2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{3.90}{30} (0,27 + 0,333) = 5,4 \text{ Kgs/cm}^2.$$

La fatiga de corte es según 19)

$$t = \frac{Q}{bd} = \frac{5000}{30.350} 350 = 0,48 \text{ Kgs/cm}^2.$$

2.º *Ejemplo:* Sea un muro de albañilería de ladrillo de las siguientes características  $h = 2,50$  mts.,  $b = 0,30$  d = 1,80 mts. y sometido a las cargas  $p = 5.000$  kgs./m.  $Q = 2.000$  Kgs.

$$\text{Tenemos} \quad \frac{2Qh}{p d^2} = \frac{2.2000 \cdot 2,5}{5000 \cdot 1,8^2} = 0,62$$

$$\frac{d}{h} = \frac{1,8}{2,5} = 0,72$$

a los cuales corresponde según la Tabla  $\frac{Eb Z}{hp} = 2,86$

$$\text{de donde} \quad Z = \frac{1}{E} 2,86 \frac{hp}{b} = \frac{1}{E} \frac{2,86.2,5.5000}{0,30} = \frac{1}{E} 119000$$

Si  $E = 30000$

$Z = 4,0$  cms.

Según la fórmula 16)  $\frac{EbZ}{hp} = 6,6 \left( \frac{2Qh}{p d^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 6,6 \sqrt{0,62^3} = 3,23$

Valor que difiere en un 11% del valor dado por la tabla.

La fatiga de compresión es según 18)

$$\delta_c = \frac{4p}{3b \left( 1 - \frac{2Qh}{p d^2} \right)} = \frac{4 \cdot 50}{3 \cdot 30 \cdot (1 - 0,62)} = 5,8 \text{ Kgs/cm}^2.$$

La fatiga de corte es según 20)

$$t = \frac{2Q}{3bd \left( 1 - \frac{2Qh}{p d^2} \right)} = \frac{2 \cdot 2000}{3 \cdot 30 \cdot 150 \cdot 0,38} = 0,88 \text{ Kg/cm}^2.$$

### CONCLUSIONES

De este estudio podemos extractar las siguientes conclusiones:

1.º La albañilería de ladrillo, en el fenómeno real que nos ocupa, admite una pequeña fatiga de tracción. El cálculo clásico, al no limitar su aplicación en relación con la fatiga máxima admisible de tracción, conduce a un error desfavorable a la seguridad. En el método de cálculo que propiciamos, en que se reduce la zona activa del muro a aquella en que se soporta exclusivamente fatigas de compresión se comete también un error, pero en todo caso favorable a la seguridad.

2.º De acuerdo con nuestro estudio las fórmulas clásicas sólo son aplicables para los muros en que se cumple la condición  $\frac{2Qh}{p d^2} \leq \frac{1}{3}$ . Para el caso en que  $\frac{2Qh}{p d^2} > \frac{1}{3}$  debe utilizarse la fórmula 13).

3.º Para el valor  $\frac{2Qh}{p d^2} = 1$  que señala la condición mecánica del volcamiento la deformación es infinita, y por lo tanto se limita a dicho valor la aplicación de las fórmulas.

4.º Según el cálculo clásico para valores de  $\frac{d}{h} > 1,15$  prima en todos los casos el esfuerzo de corte para los efectos de la deformación. Nuestras fórmulas indican que este límite varía con  $\frac{2Qh}{p d^2}$  de modo que para valores de este factor cercano a 1 prima siempre la flexión.

5.º Establecidas las fórmulas para la determinación de la deformación de un muro corresponde a continuación el estudio del comportamiento de un conjunto de muros ligados de modo que adquieran igual deformación por efecto de una fuerza Q horizontal y una fuerza vertical pd. Para este nuevo estudio es de gran utilidad la fórmula aproximada 16) aplicable a valores de  $\frac{d}{h}$  no inferiores a 0,2 y  $\frac{2Qh}{p d^2}$  no superiores a 0,8.