PLANES DE AHORRO Y PRESTAMO

Ing. SALOMON CHORNIK

PREAMBULO

El presente trabajo consiste en el análisis actuarial de los planes de Ahorro y Préstamo contractuales del tipo aplicado primeramente en nuestro país por la SOCIEDAD DE AUTO-CONSTRUCCION C. P. A. (SODAC) y posteriormente por la CORPORACION DE LA VIVIENDA.

Es preciso aclarar que SODAC constituye una Sociedad Constructora de Viviendas Económicas que financia sus operaciones en base a las acciones adquiridas por sus socios. Sus planes de Capitalización y de Crédito asimilables desde el punto de vista actuarial a los planes de Ahorro y Préstamo a que este estudio se refiere, están concebidos para permitir a cada socio el logro de la vivienda propia.

Especial interés tiene en la actualidad el estudio de dichos planes de Ahorro y Préstamo en relación con las Asociaciones de Ahorro y Préstamo autorizadas por la CAJA CENTRAL DE AHORRO Y PRESTAMOS conforme al D.F.L. 205.

Este trabajo ha sido elaborado por su autor en SODAC, en conexión con los informes y estudios exigidos por la Caja Central para autorizar el funcionamiento de varias Asociaciones de Ahorro y Préstamo en el país que fueron asesoradas, en su formación, por los profesionales agrupados en SODAC.

El autor se complace en expresar que los planes, materia de este trabajo, tanto en su concepción como en su estructuración, no constituyen obra individual, sino labor de equipo de los profesionales de SODAC: arquitectos, ingenieros. constructores civiles y abogados, dirigida por el Gerente de dicha organización, Ing. Sr. Federico de la Jara Bustos.

Corresponde también mencionar en esta oportunidad al Ing. Sr. Clemente Lagos de Ayala, con quien compartió el autor de este trabajo la responsabilidad de los estudios actuariales básicos de los planes de SODAC.

1.—EXPLICACION ELEMENTAL DE LOS PLANES DE AHORRO Y PRESTAMO

Para explicar en qué consiste un plan de ahorro y préstamo imaginemos una asociación simplificada para la cual se cumplan las siguientes condiciones:

1) Ingreso anual de socios constante y tiempo de permanencia en la asociación también constante.

2) Cuota de ahorro igual a la cuota de amortización a pagar una vez al año el 1º de Enero.

3) Inversión de los recursos en viviendas, a medida que éstos se reúnen, con las cuotas tanto de ahorro como de amortización. Se entiende que al ser entregada una vivienda a un socio, éste pasa de la condición de ahorrador a deudor por el saldo resultante.

La condición 1) implica que si la asociación se inicia, por ejemplo, con 100 socios el primer año, el segundo año contará con 200 socios, el tercer año con 300 socios, etc. Esto no significa que el número de socios crecerá de manera indefinida. Cada socio ingresado permanece en la asociación el tiempo necesario para recibir su préstamo (período de ahorro) más el tiempo para cancelar su préstamo (período de amortización). De manera que junto con la corriente de ingreso de socios se produce una corriente inversa de egreso de socios. El egreso de socios empieza al término de la permanencia del grupo fundador que ingresó el primer año, o sea, cuando éste ha terminado de cancelar su préstamo. Si este lapso de tiempo a contar desde la iniciación de la asociación es de 15 años, la organización llegará a contar con 1.500 miembros, en el supuesto de un ingreso anual de 100 socios. De ahí para adelante se estabilizará la asociación en el número precedentemente señalado, puesto que egresará el mismo número que el que ingrese.

Si se cumple la condición 2), esto es igual cuota de ahorro y de amortización, y el tiempo de permanencia es de 15 años, el socio pagará, tanto antes como después de recibir su préstamo, una cuota anual el 1º de Enero de cada año equivalente a 1/15 del valor de la vivienda. Si la casa tiene un valor de Eº 7.500 pagará anualmente Eº 500.

En el cuadro adjunto indicamos las sumas acumuladas por la asociación junto con el número de socios en dicho caso.

	Número de socios actuales	**Sumas acumuladas en miles de Eº**	**Sumas pagadas miles de Eº**	**Número de Viviendas Financiadas**	**Tiempo de espera (años)**
1º Año	100	50	50	6,7	4
2º Año	200	100	150	20	6
3º Año	300	150	300	40	6
4º Año	400	200	500	67	7
5º Año	500	250	750	100	7
6º Año	600	300	1.050	140	7
7º Año	700	350	1.400	188	7
8º Año	800	400	1.800	240	7
9º Año	900	450	2.250	300	7
10º Año	1.000	500	2.750	365	7
11º Año	1.100	550	3.300	440	7
12º Año	1.200	600	3.900	520	7
13º Año	1.300	650	4.550	610	7
14º Año	1.400	700	5.250	700	7
15º Año	1.500	750	6.000	800	7
16º Año	1.500	750	6.750	900	7
17º Año	1.500	750	7.500	1.000	7
18º Año	1.500	750	8.250	1.100	7
19º Año	1.500	750	9.000	1.200	7
20º Año	1.500	750	9.750	1.300	7

Puede observarse del cuadro anterior que en el 5º año se tiene financiado un total de 100 casas que son tomadas por el grupo ingresado el primer año, los cuales, por lo tanto, han debido esperar un plazo máximo de 4 años. En el 8º año se ha reunido recursos equivalentes a 240 viviendas, con lo cual pueden disponer de vivienda el total de socios activos al 2º año y algunos socios ingresados en el tercer año.

Por lo tanto, los socios ingresados el segundo año deben esperar para tener casa un plazo máximo de 6 años. El plazo máximo de espera crece rápidamente a 7 años para los socios ingresados posteriormente, estabilizándose en dicho tiempo.

En los 7 años de espera máxima los socios reúnen como ahorro un porcentaje del valor de la vivienda del —x100=46,7%.

Se manifiesta en este sencillo ejemplo la ventaja de la asociación de ahorro y préstamo que permite domiciliar a sus miembros exigiéndoles reunir como ahorro sólo una parte del valor de la vivienda, facilitándoles un crédito por el saldo de su valor a un relativo largo plazo.

El plan simple esquematizado constituye un **plan de ahorro y préstamo autofinanciado** a 7 años, señalado el plazo de espera máximo o período de ahorro.

Podemos, mediante el artificio de introducir capital exterior al plan, reducir el plazo de espera. Por ejemplo: si ayudamos al desarrollo del plan con un capital exterior de 750 millones de pesos, equivalentes a 100 viviendas, podemos reducir el plazo de espera a 6 años y exigir, por lo tanto, el 6/15x100=40% de porcentaje de ahorro en vez del 46,7% del caso anterior.

Decimos que dicho plan es **financiado con ayuda exterior.**

Si por el contrario alargamos el plazo de espera nos quedará disponible fondos sin ocupar, los cuales alcanzarán a la cifra de 750 millones de pesos, o sea el equivalente a 100 viviendas, si convenimos en un plazo de 8 años en vez de 7 años que corresponden al plan autofinanciado. Este tipo de plan lo denominamos **plan sobrefinanciado.**

2.—ANALISIS DE PLANES DE AHORRO

2.1.—EXPLICACION GENERAL.—En el ejemplo anteriormente tratado se presentó una combinación de Ahorro y Préstamo en que el ahorro era invertido, inmediatamente de producido, en viviendas que se entregaban a los mismos ahorrantes. El objeto era mostrar el efecto de la Serie abierta por medio del cual, con un porcentaje relativamente reducido del valor de la vivienda y en un plazo prudente de espera, cada asociado del plan podía obtenerla.

Ahora, a fin de permitir el análisis de este tipo de planes, separamos los planes de Ahorro de los de Préstamos. Entenderemos por plan de **Ahorro Puro** aquel en que los asociados, después de ahorrar periódicamente durante un plazo n, retiran sus aportes. La serie abierta se produce por el ingreso intermitente o continuo de asociados y el retiro en la misma forma al cumplirse el plazo del plan. El número de asociados y los ahorros acumulados crecen hasta el plazo n, a partir del cual se mantiene constante. Entenderemos, por otra parte, que en un plan de **Préstamo Puro,** independientemente de todo ahorro anterior, se concede préstamos hipotecarios a los asociados que los amortizan en un plazo dado m. El número de deudores y el Saldo Hipotecario crecerá hasta el tiempo m, a partir del cual se mantiene constante.

2.2.—AHORRO PERIODICO CON INGRESO INTERMITENTE DE ASOCIADOS.—Supongamos que anualmente ingresa a la asociación un grupo unidad de personas. Cada grupo ahorra al iniciarse el año una cuota α y retira lo ahorrado al término del año n, dejando de pertenecer a la organización.

En el primer año el 1.er grupo ahorra α

En el segundo año el 1.er grupo, más el 2º grupo que ha ingresado en el segundo año, ahorran en total $2\,\alpha$

En el tercer año el 1.er grupo, más el 2º grupo, más el 3.er grupo que ha ingresado en el tercer año, ahorran en total $3\,\alpha$

En el año t n la suma total de recursos que llamamos E_t resulta:

$$E_t = \alpha + 2\alpha + 3\alpha + \ldots\ldots t\alpha = \alpha\,(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots t)$$

Con la serie aritmética: $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots t = \frac{t\,.\,(t+1)}{2}$ se obtiene

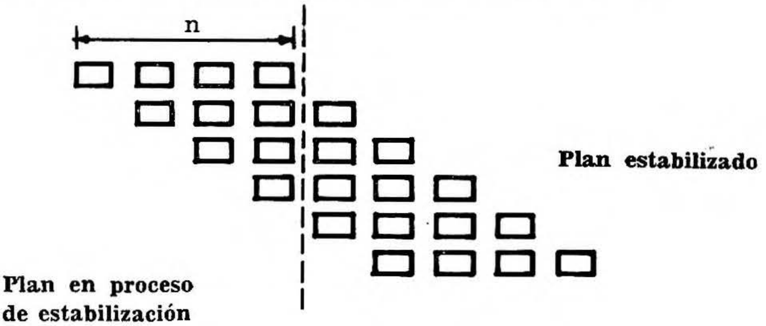
$$1)\quad E_t\ \frac{t\,(t+1)}{2}\ \alpha$$

En el año n

$$1_1)\quad E_n\ \frac{n\,(n+1)}{2}\ \alpha$$

Desde el año n adelante los nuevos recursos ingresados deben emplearse en los retiros, de manera que el plan así concebido da lugar a un excedente E_n constante.

Podemos representar el plan gráficamente indicando con rectángulos las cuotas entregadas anualmente en el caso $n = 4$



2.3.—AHORRO PERIODICO CON INGRESO CONTINUO DE ASOCIADOS.—

En este caso el ingreso no se efectúa totalmente al iniciarse el año, sino de manera repartida a lo largo de éste, o en otros términos hay un ingreso continuo de asociados tal, que el grupo unidad entra a la asociación en 1 tiempo unidad. Así el grupo que ingresa en el primer año no ahorra como el caso anterior una suma $\propto$ sino solamente $\frac{\propto}{2}$ y en los años sucesivos sumas $\propto$ cada año. Lo mismo sucede con los grupos que ingresan en los años siguientes.

En el primer año el 1.er grupo ahorra $\frac{\propto}{2}$

En el segundo año el 1º ahorra $\propto$, el 2º grupo que ingresa dicho año $\frac{\propto}{2}$. En total $\propto + \frac{\propto}{2}$

En el tercer año el 1.er grupo ahorra $\propto$ el 2º grupo $\propto$ y el 3.er grupo $\frac{\propto}{2}$. En total $2\propto + \frac{\propto}{2}$

En total en el año t la suma total de recursos E_t resulta:

$$E_t = \frac{\propto}{2} + \propto + \frac{\propto}{2} + 2\propto + \frac{\propto}{2} + 3\propto + \ldots\ldots\ldots (t-1)\propto + \frac{t\propto}{2}$$

$$E_t = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots t - 1)\propto + \frac{t\propto}{2}$$

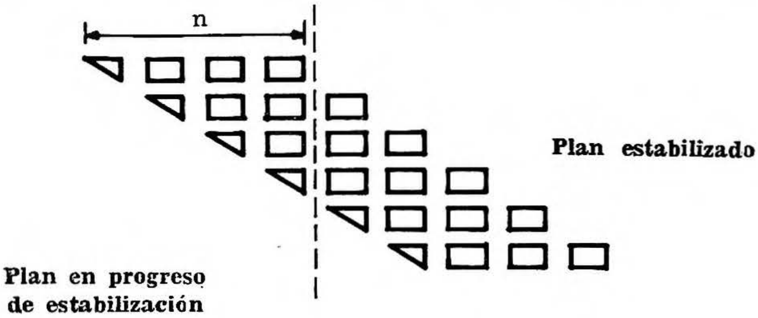
$$E_t = \frac{t\,(t-1)}{2}\propto + \frac{t\propto}{2} =$$

2) $$E_t = \frac{t^2\propto}{2}$$

En el año n

2.1) $$E_n = \frac{n^2\propto}{2}$$

Podemos representar el plan gráficamente indicando con rectángulos las cuotas entregadas por cada grupo después del primer año y con triángulos las cuotas entregadas por cada grupo durante el año de ingreso:



A la misma fórmula 1.2 podemos llegar mediante el Cálculo Integral. En el año t el número de grupos es t y ahorra en el tiempo unidad la suma t   En el tiempo infinitesimal dt se ahorra t y dt en el tiempo trans-

currido desde t 0 a t t

$$E_t = \int_0^t \propto . \, tdt \quad \frac{\propto t^2}{2}$$

2.4.—**AHORRO UNICO CON INGRESO CONTINUO DE ASOCIADOS.**—Si cada grupo ingresado anualmente efectúa un ahorro único una sola vez, manteniéndose ésta durante los años n del plan, se tendrá evidentemente:

3) $E_t = t\gamma$

3.1) $E_n = n\gamma$.

Puede presentarse el caso combinado de ahorro periódico y ahorro único, si en el caso del ahorro periódico no se retira de inmediato el dinero acumulado $\gamma = n\propto$ al terminar el plazo n, sino transcurrido un tiempo adicional n'.

4.0) $E_t = \frac{\propto n^2}{2} + (t - n) \propto n$

siendo $t > n$

4.1) $E_{n+n'} = \frac{n\propto}{2} (n + 2n')$

También puede presentarse el caso de que cada grupo ingresado deposite un ahorro inicial γ y un ahorro periódico anual $\propto$. En este caso:

4.2) $E_t = t \, . \, \gamma + \frac{t^2}{2} \propto$

4.3) $E_n = n \, . \, \gamma + \frac{n^2}{2} \propto$

2.5) **CAPITALIZACION DEL AHORRO PERIODICO.**—La cuota $\propto$ de un grupo unidad capitalizado en el tiempo t es $\propto (1 + i)^t$ y el ahorro total acumulado capitalizado por el mismo grupo en dicho tiempo

$$A_t = \int_0^t \propto . (1+i)^t \, dt = \frac{\propto . \left| (1+i)^t \right|_0^t}{\text{Log}\,(1+i)}$$

$$A_t = \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1 \right]$$

En el año n

$$5) \qquad A_n = \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} \left[(1+i)^n - 1 \right]$$

Es fácil verificar que para $i \to 0$, se tiene $A_n = n\propto$

El ahorro acumulado por todos los grupos en el instante t, cada uno de antigüedad variable entre $t = 0$ y $t = t$ será:

$$E_t = \int_0^t \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1 \right] . dt$$

$$E_t = \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} . \left| \frac{(1+i)^t}{\text{Log}\,(1+i)} - t \right|_0^t$$

$$6.0) \qquad E_t = \frac{\propto}{\text{Log}^2\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1 - t \,.\, \text{Log}\,(1+i) \right]$$

Y en el año n:

$$6.1) \qquad E_n = \frac{\propto}{\text{Log}^2\,(1+i)} \left[(1+i)^n - 1 - n \,.\, \text{Log}\,(1+i) \right]$$

Para $t > n$, $E_t = E_n$,
lo cual se verifica teniendo presente que el ahorro ingresado en régimen estabilizado $\propto n$ más los intereses producidos por el excedente del ahorro E_n debe permitir devolver el ahorro capitalizado del grupo ingresado n años antes, o sea:

$$\propto n + E_n \log\,(1+i) \equiv A_n$$

Reemplazando los valores de E_n y A_n se verifica:

$$\propto n + \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} \left[(1+i)^n - 1 \right] - \propto n \equiv \frac{\propto}{\text{Log}\,(1+i)} \left[(1+i)^n - 1 \right]$$

2.6) **CAPITALIZACION DEL AHORRO UNICO.**—Siendo γ el ahorro único efectuado a su ingreso por cada grupo unidad, este ahorro capitalizado en el tiempo t es:

$$B_t = \gamma\,(1+i)^t$$

y el ahorro total acumulado por los grupos ingresados desde $t = 0$ hasta $t = t$

$$G_t = \int_0^t \gamma\,(1+i)^t \, dt = \gamma \frac{(1+i)^t - 1}{\text{Log}\,(1+i)} \qquad G_n = \gamma \frac{(1+i)^n - 1}{\text{Log}\,(1+i)}$$

3.—CADUCIDAD EN EL AHORRO

3.1) **LEY DE CADUCIDAD.**—En el capítulo anterior hemos considerado que el grupo unidad permanece invariable durante el transcurso del plazo del plan. Estudiaremos ahora el caso en que se produzcan retiros de asociados en cada grupo, proporcionales siempre al número de asociados restantes. En otros términos, aceptaremos una ley exponencial de la caducidad.

El grupo unidad en el tiempo t se reducirá, por lo tanto, a:

$$8)\quad \varkappa_t = (1 + j)^{-t}$$

siendo j un factor de caducidad.

Dicho grupo reducido ahorrará en el tiempo t:

$$A_t = t \cdot \alpha \cdot \varkappa_t = \alpha \cdot t \cdot (1 + j)^{-t}$$

El conjunto de grupos de antigüedad variable ingresados de manera continua, reunirá en el tiempo t:

$$E_t = \int_0^t \alpha \cdot t \cdot (1 + j)^{-t} \cdot \alpha t = \alpha \left| \frac{-t(1+j)^{-t}}{\operatorname{Log}(1+j)} + \frac{(1+j)^{-t}}{\operatorname{Log}^2(1+j)} \right|_0^t$$

$$E_t = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}^2(1+j)} \left[1 - (1+j)^{-t} \left\{ 1 + t \cdot \operatorname{Log}(1+j) \right\} \right]$$

Nos interesa el valor $\frac{E_t}{\varkappa_t}$, o sea, el ahorro acumulado por socio restante.

$$9)\quad \frac{E_t}{\varkappa_t} = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}^2(1+j)} \left[(1+j)^t - 1 - t \cdot \operatorname{Log}(1+j) \right]$$

expresión análoga a la del ahorro con interés, lo cual significa que hay analogía entre el interés i y la caducidad j para el efecto de la determinación del ahorro acumulado por socio restante del grupo inicial. Para $t = n$:

$$9.1)\quad \frac{E_n}{\varkappa_n} = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}^2(1+j)} \cdot \left[(1+j)^n - 1 - t \cdot \operatorname{Log}(1+j) \right]$$

Si en la expresión de $\frac{E_t}{\varkappa_t}$ reemplazamos:

$$c = \operatorname{Log}(1+j)$$

tendremos:

$$9.2)\quad \frac{E_t}{\varkappa_t} = \frac{\alpha}{c^2} \left(e^{ct} - 1 - t \cdot c \right)$$

Desarrollando en dicha fórmula el término e^{ct} en serie y limitándonos a la tercera potencia:

$$e^{ct} = 1 + c \cdot t + \frac{c^2 \cdot t^2}{2} + \frac{c^3 \cdot t^3}{6}$$

tendremos las fórmulas aproximadas:

$$\frac{E_t}{\mathcal{X}_t} = \frac{\alpha_t}{6}(3t + c \cdot t^2)$$

$$10)\quad \frac{E_n}{\mathcal{X}_n} = \frac{\alpha \cdot n}{6}(3n + c \cdot n^2)$$

Si en estas fórmulas hacemos $c = 0$ se verifican las fórmulas ya conocidas:

$$E_t = \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$$

$$E_n = \frac{\alpha \cdot n^2}{2}$$

Para $t > n$:

$$\frac{E_t}{\mathcal{X}_n} = \frac{E_n}{\mathcal{X}_n} = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}^2(1+j)}\left[(1+j)^n - 1 - n \cdot \operatorname{Log}(1+j)\right]$$

que nos da el saldo de ahorro en régimen estabilizado por socio restante.

3.2) CAPITALIZACION DEL AHORRO CONSIDERADA LA CADUCIDAD.

El grupo unidad reducido a $\mathcal{X} = (1+j)^{-t}$ en el tiempo t, acumula un ahorro capitalizado:

$$A_t = \alpha \cdot (1+j)^{-t}\,\frac{(1+i)^t - 1}{\operatorname{Log}(1+i)}$$

y el conjunto de grupos de antigüedad variable ingresados de manera continua, reunirá en el tiempo t un ahorro capitalizado:

$$E_t = \int_0^t \alpha (1+j)^{-t}\,\frac{(1+i)^t - 1}{\operatorname{Log}(1+i)} \cdot dt$$

$$E_t = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}(1+i)}\int_0^t \left[\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{-t} - (1+j)^{-t}\right] \cdot dt$$

$$E_t = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}(1+i)}\left[\frac{\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{-t} - 1}{\operatorname{Log}(1+i) - \operatorname{Log}(1+j)} + \frac{(1+j)^{-t} - 1}{\operatorname{Log}(1+j)}\right]$$

$$E_t = \frac{\alpha \cdot (1+i)^t}{\operatorname{Log}(1+i)} \cdot \left[\frac{(1+j)^{-t} - (1+i)^{-t}}{\operatorname{Log}(1+i) - \operatorname{Log}(1+j}+\frac{(1+j)^{-t} \cdot (1+i)^{-t} - (1+i)^{-t}}{\operatorname{Log}(1+j)}\right]$$

$$11)\quad E_t = \frac{\alpha \cdot \mathcal{X}_t}{\operatorname{Log}\frac{1+i}{1+j}} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{\operatorname{Log}(1+i)} - \frac{(1+j)^t - 1}{\operatorname{Log}(1+j)}\right]$$

$t = n$

$$11.1)\quad E_n = \frac{\alpha \cdot \mathcal{X}_n}{\operatorname{Log}\frac{1+i}{1+j}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\operatorname{Log}(1+i)} - \frac{(1+j)^n - 1}{\operatorname{Log}(1+j)}$$

Para $i \to 0$ se verifica la fórmula. 9)

$$\frac{E_t}{\mathcal{X}} = \frac{\alpha \left[(1 + j) - 1 - t \,.\, \mathrm{Log}\,(1 + j) \right]}{\mathrm{Log}^2\,(1 + j)}$$

Verificando la fórmula correspondiente al ahorro con caducidad, puede observarse la homogeneidad de la expresión de $\frac{E_t}{\mathcal{X}}$ respecto de j e i.

4) ANALISIS DE PLANES DE PRESTAMOS.

4.1) AMORTIZACION DE UN PRESTAMO.

Indicamos con el término ℓ el préstamo neto dado en unidades vivienda a un miembro de la Asociación, englobando en la expresión $1 - \ell$ los ahorros efectuados con anterioridad al préstamo y las amortizaciones anticipadas.

Designamos con β el dividendo anual y con i el interés exigido. Se dedeberá verificar que el préstamo concedido capitalizado en el plazo de amortización m sea igual a la suma de los dividendos capitalizados desde la fecha de su pago hasta la cancelación del préstamo.

Los dividendos capitalizados en el tiempo t, como en la fórmula del ahorro capitalizado.

$$D_t = \beta \,.\, \frac{(1 + i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1 + i)}$$

y el préstamo capitalizado

$$C_t = \ell \,.\, (1 + i)^t$$

De la igualdad: $D_m = C_m$ que se cumple para el plazo de amortización m:

$$\beta \,.\, \frac{(1 + i)^m - 1}{\mathrm{Log}\,(1 + i)} = \ell \,.\, (1 + i)^m$$

$$\beta = 1 \,.\, \frac{(1 + i)^m}{(1 + i)^m - 1} \,\mathrm{Log}\,(1 + i)$$

Reemplazado Log(1 + i) por sus primeros términos de su desarrollo en serie, tendremos la fórmula aproximada:

$$\beta = \frac{\ell \,.\, (1 + i)^m}{(1 + i)^m - 1} \,.\, i \,\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

que se aplica con suficiente aproximación en el caso de amortizaciones mensuales.

4.2) PLANES DE PRESTAMOS.

Consideramos un plan continuo de préstamos tal que se concedan periódicamente préstamos ℓ a los miembros de la asociación.

La suma de los préstamos capitalizados en el plazo t tienen una expresión similar a :

$$P_t = \frac{(1 + i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1 + i)}$$

Dado que la suma total de dividendos pagados por un asociado (o por un grupo unidad) de antigüedad t es:

$$D_t = \beta \,.\, \frac{(1 + i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1 + i)}$$

la suma total de dividendos pagados por los asociados de antigüedad variable de O a t:

$$Q_t = \int_0^t \beta \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1+i)}\, dt$$

$$13)\quad Q_t = \frac{\beta}{\mathrm{Log}^2\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1 - t.\mathrm{Log}\,(1+i)\right]$$

expresión similar a la de E_t

El saldo hipotecario F_t en el tiempo t es:

$$F_t = P_t - Q_t = \ell\, \frac{(1+i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1+i)} - \frac{\beta}{\mathrm{Log}^2\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1 - t \cdot \mathrm{Log}\,(1+i)\right]$$

Reemplazado el valor de ℓ obtenido de la expresión de β :

$$F_t = \frac{\beta}{\mathrm{Log}^2\,(1+i)} \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^m} \left[(1+i)^t - 1\right] - \frac{\beta}{\mathrm{Log}^2\,(1+i)} \left[(1+i)^t - 1\right] + \frac{\beta t}{\mathrm{Log}\,(1+i)}$$

$$14)\quad F_t = \frac{\beta}{\mathrm{Log}\,(1+i)} \left[t - \frac{(1+i)^t - 1}{\mathrm{Log}\,(1+i)\ \ (1+i)^m} \right]$$

Para t = m:

$$F_m = \frac{\beta}{\mathrm{Log}\,(1+i)} \left(m - \frac{\ell}{\beta}\right)$$

$$15)\quad F_m = \frac{\beta m - \ell}{\mathrm{Log}\,(1+i)}$$

Para $t > m$, $\qquad F_{t > m} = F_m$

expresión que se verifica teniendo presente que la diferencia entre los dividendos anuales β.m pagados por los propietarios y el préstamo concedido, debe permitir pagar los intereses correspondiente al saldo hipotecario F. Log (1 + i).

5º FORMULACIONES DE PLANES DE AHORRO Y PRESTAMOS

5.1 **EXPLICACION GENERAL.**—Todo plan de Ahorro y Préstamo, como su nombre lo indica, resulta de la combinación de planes de Ahorro y planes de Préstamos de diversas modalidades, tales como las señaladas en el capítulo anterior.

Para mostrar el mecanismo de la formulación de los planes de Ahorro y Préstamos imaginamos un Plan constituido por:

a) Plan de Ahorro ordinario, de plazo n variable de 1 a 10 años en que el asociado integra mediante pagos periódicos la suma $n\alpha$, parte de la cual se retira al término del plazo n quedando retenida una suma δ mientras permanece en la Asociación.

b) Plan de Préstamos de plazo m, de amortización variable entre 8 y 12 años, en que el asociado paga con dividendos β referidos al valor de la vivienda obtenida. Dicho préstamo es igual al valor de la vivienda (unidad) menos la suma de lo ahorrado $n\alpha$ y la cuota al contado e que el mismo asociado aporta en el momento de concedérsele el préstamo, y más el valor del ahorro retenido.

El valor del préstamo neto es, por lo tanto, $\ell = 1 - (n\alpha + \epsilon) + \delta$

c) Plan de Ahorro Adicional de plazo m en que el asociado mantiene retenida la suma δ hasta la cancelación del préstamo por el asociado.

5.2 **SISTEMA DE PLANES.**—En la tabla siguiente nos damos un sistema de planes de Ahorro y Préstamo de plazo n variable. Es indudable que disponemos de una gran libertad para fijar los porcentajes de integración de ahorros para cada plan, así como el plazo de amortización. No nos detendremos en las diversas consideraciones de tipo comercial y técnico que determinan el criterio de elección y nos limitaremos a señalar que la condición de financiamiento del sistema debe ser satisfecha para que pueda garantizarse su normal desarrollo.

Dicha condición de financiamiento implica que los planes de Ahorro y Ordinario y Adicional que forman parte de cada plan cubran parcial, total o sobradamente el Saldo Hipotecario estabilizado resultante del plan de préstamos. De esta manera se obtienen, según sea el caso, planes financiados con ayuda exterior, autofinanciados o sobrefinanciados.

TABLA PLAN DE AHORRO Y PRESTAMO

Plan años	Integración de ahorros	Cuota anual	Préstamo	Plazo de amortización	Pago anual
1	0,40	0.40	0,70	8	0.113
2	0,35	0,175	0,75	9	0,111
3	0,30	0,100	0,80	9	0,118
4	0,25	0,0625	0,85	10	0.117
5	0,25	0,0500	0,85	10	0,117
6	0,25	0,0417	0,85	10	0,117
7	0,25	0,0357	0,85	10	0,117
8	0,20	0,0750	0,90	12	0,109
9	0,20	0,0222	0,90	12	0,109
10	0,20	0,0200	0,90	12	0,109

5.3 **EXCEDENTE DEL PLAN DE AHORRO ORDINARIO.**—El Saldo del Ahorro capitalizado en el tiempo t es según 11)

$$E_t = \mathcal{L}_n \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{Log} \frac{1 + ia}{1 + j}} \left[\frac{(1 + ia)^t - 1}{\operatorname{Log}(1 + ia)} - \frac{(1 + j)^t - 1}{\operatorname{Log}(1 + j)} \right]$$

En nuestros cálculos no hemos considerado el pago de intereses por los ahorros, pero si la aplicación de un porcentaje a los ahorros, obtenido de los intereses cobrados a los préstamos, destinado a reserva con fines de capitalización de la Asociación. Este porcentaje lo hemos fijado en un 1%, o sea,

$ia = 0{,}01$

Este excedente crece con relativa rapidez hasta $t = n$ en que adquiere el valor

11.1) $$E_n = n \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{Log} \frac{1 + i_a}{1 + j}} \quad \frac{(1 + ia)^n - 1}{\operatorname{Log}(1 + ia)} - \frac{(1 + j)^n - 1}{\operatorname{Log}(1 + j)}$$

A partir de n, no obstante mantenerse constante el número de ahorrantes, el valor de E_n crece, aunque lentamente por efecto de la capitalización de la reserva

11.2) $$E_{tp} = E_n \,(1 + ia)^{tp}$$

Siendo $t_p = t - n$ y

11.3) $$E_m = E_n \,(1 + ia)^m$$

5.4 **SALDO HIPOTECARIO DEL PLAN DE PRESTAMO.**—La fórmula 14) permite determinar el Saldo Hipotecario en un plan de préstamo en el que se concede anualmente un préstamo ℓ a un miembro de la Asociación que ha cumplido el plazo n de ahorro. Con los $\varkappa_n$ miembros a que se reduce el grupo unidad de antigüedad n dicho Saldo Hipotecario resulta:

15.1) $$F_{tp} = \frac{\varkappa_n}{\operatorname{Log}(1 + i)} \left(\beta\, tp - \ell \frac{(1 + i)^{tp} - 1}{(1 + i) \quad - 1}\right)$$

para $t_p = m$

15.2) $$F_m = \frac{\varkappa_n}{\operatorname{Log}(1 + i)} \left(\beta \,.\, m - \ell\right)$$

5.5 **EXCEDENTE DEL PLAN DE AHORRO ADICIONAL.**—Dado que el Ahorro Adicional se produce a partir de n y afecta a los $\varkappa_n$ miembros de la Asociación que se benefician anualmente con un préstamo, el Excedente producido por el ahorro único q resulta de 7)

7.1) $$G_{tp} = \frac{\varkappa_n \cdot q}{\operatorname{Log}(1 + ia)} \left((1 + ia)^{tp} - 1\right)$$

y 7.2) $$G_m = \frac{\varkappa_n \cdot q}{\operatorname{Log}(1 + ia)} \left((1 + ia)^m - 1\right)$$

5.6 **PROVISION DE FONDOS LIQUIDOS.**—Se ha previsto, a fin de permitir la devolución inmediata, aún frente a una demanda extraordinaria de retiro de ahorros, se tenga disponible en valores de fácil liquidez y Caja una suma equivalente a un porcentaje prudente del Saldo del Ahorro ordinario y adicional. Por lo tanto, los fondos líquidos serán si dicho porcentaje es del 10 por ciento

$$I_{tp} = 0.10\,(E_{tp} + G_{tp})$$

5.7 **FINANCIAMIENTO DE LOS PLANES.**—Individualmente considerado cada plan durante el plazo n de ahorro producirá un excedente de fondos determinado por el valor creciente de E_t. A partir de n por efecto de los préstamos concedidos el saldo de recursos disminuirá hasta tornarse negativo, lo cual indica que el plan para su cumplimiento requiere la previsión de recursos exteriores, provenientes sea de otros planes de ahorro y préstamo o bien de planes especiales de ahorro puro, o la cesión de créditos a través del mecanismo del Descuento Hipotecario.

Por lo tanto, podremos en todo momento determinar para un tiempo $t > n$ el Saldo de Recursos R_{tp} definido por

$$R_{tp} = E_{tp} + G_{tp} - F_{tp} - I_{tp}$$

y teniendo presente el valor de I_t

$$R_{tp} = 0{,}9\,(E_{tp} + G_{tp}) - F_{tp}$$

Un valor característico para cada plan de R_{tp} es el correspondiente al tiempo $tp = m$ y que determina las condiciones de financiamiento de cada plan a largo plazo.

En el tiempo $t = n + m$ el plan se estabiliza en el sentido de que el número de asociados comprometidos en el plan se mantiene constante de ahí para adelante. El valor R_{tp} en valor absoluto debe disminuir a partir de $t = n + m$ por efecto de la acumulación y capitalización de las reservas. En un tiempo determinable teóricamente, este valor puede alcanzar un valor cero y después dar valores positivos, pero su cálculo no ofrece interés práctico.

A manera de ilustración en la aplicación de las fórmulas veremos los resultados que se obtienen para el plan de seis años.

a) **Excedente del Ahorro Ordinario.** Según 11.1)

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{E_n}{\varkappa_n} = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\dfrac{1+ia}{1+j}}\left[\frac{(1+ia)^n - 1}{\mathrm{Log}\,(1+ia)} - \frac{(1+j)^n - 1}{\mathrm{Log}\,(1+j)}\right]$$

con los valores

$$n = 6 \qquad ia = 0{,}01 \qquad \mathrm{Log}\,(1 + ia) = 0{,}01$$

$$\alpha = 0{,}0417 \qquad j = 0{,}10 \qquad \mathrm{Log}\,(1 \subset j) = 0{,}096$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{E_n}{\varkappa_n} = 11{,}0\,(\,(1{,}10^6 - 1)\,.\,10{,}4\,.\!-(1{,}01^6 - 1)\,.\,100) =$$

$$11{,}0\,(8{,}5 - 6{,}15) = 25{,}0$$

$$\frac{E_n}{\varkappa_n} = 25{,}0\,.\,\alpha = 25{,}0\,.\,0{,}0417 = 1{,}04$$

Según (11.2) Con m = 10

$$\frac{E_m}{\mathcal{X}_n} = \frac{E_n}{\mathcal{X}_n}(1 + ia)^m = 1{,}04 \;.\; 1{,}01^{10} = 1{,}04 \;.\; 1{,}105 = 1{,}14$$

b) **Excedente del Ahorro Adicional:**
Según 7.2)

$$\frac{G_m}{\mathcal{X}_n} = \frac{q}{\mathrm{Log}\,(1 + ia)}\left((1 + ia)^m - 1\right)$$

con $q = 0{,}20$

$$\frac{G_m}{\mathcal{X}_n} = \frac{0{,}20}{0{,}01}(1{,}105 - 1) = 2{,}10$$

c) **Saldo Hipotecario:**
Según 15) con

$\beta = 0{,}117$ $\qquad \ell = 0{,}85$ $\qquad i = 0{,}07$

$\mathrm{Log}\,(1 + i) = 0{,}0675$

$$\frac{F_n}{\mathcal{X}_n} = \frac{\beta m - \ell}{\mathrm{Log}\,(1 + i)} = \frac{1{,}17 - 0{,}85}{0{,}0675} = 4{,}75$$

Saldo de Recursos:

$$\frac{R_n}{\mathcal{X}_n} = \frac{0{,}9}{\mathcal{X}_n}(E_m + G_m) - \frac{F_m}{\mathcal{X}_n}$$

$$\frac{R_m}{\mathcal{X}_n} = 0{,}9 \;.\; (1{,}04 + 2{,}19) - 4{,}75 = -1{,}92$$

El Saldo de Recursos por socio restante es para el plan de seis años al final del plazo m $\frac{R_m}{\mathcal{X}_n} = -1{,}92$ Estos recursos pueden ser provistos mediante el mecanismo del descuento hipotecario. El Descuento necesario sería en este caso referido a valor vivienda.

$$D = \frac{R_m}{F_m} \;.\; \ell = \frac{1{,}92}{4{,}75} \;.\; 0{,}85 = 0{,}34$$

Por cada vivienda otorgada anualmente, un 34% de su valor puede ser provisto del exterior mediante la cesión de hipotecas.

Si para nuestro caso el 35% del valor de la vivienda ($n\alpha + \epsilon$) es financiado por el asociado beneficiado con la vivienda, la parte financiada por el Sistema de Ahorro y Préstamo resulta

$$100 - (35 + 34) = 31\%$$

Este mismo cálculo puede repetirse para los demás planes, a fin de obtener un valor medio del Saldo de Recursos correspondiente al Conjunto de Planes. Es posible verificar que este valor medio no difiere mucho del obtenido para el plan de 6 años, comprendido entre los planes de 1 a 10 años.